令和６年度
医学部一般選抜（N 全学統一方式第２期二次試験）解答
数学

【１】

(1) $a=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ より $\frac{2}{a}=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ であるから

$a+\frac{2}{a}=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{3}=2\sqrt{5}$ を得る.　　　　　　答：　$2\sqrt{5}$

(2) まず、(1)より $\sqrt{5}=\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$　…①　である.　a は有理数であると仮定する.
このとき, $\frac{a}{2}$ も有理数、$\frac{1}{a}$ も有理数となるから、$\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$ も有理数となる。そうすると
①より$\sqrt{5}$ が有理数となってしまい、これは$\sqrt{5}$ が無理数であることに矛盾する.
以上より、a は無理数でなければならない（背理法）.

【2】

(1) $C(2,2)$ とし、求める接線を $y=kx$ とおく. 条件より $0<k<1$ である.

CA＝1 であるから、C と ℓ の距離の公式よりCA $=\frac{|2k-2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$ を得る. 辺々２乗して整理すると $3k^2-8k+3=0$ を得るから, これを解くと $k=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$ を得る. いま $0<k<1$ であったから $k=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ である. 従って, ℓ : y $=\frac{4-\sqrt{7}}{3}x$ を得る.

つぎに、直線 CA は ℓ に垂直であるから、その方程式は

$y=-\frac{3}{4-\sqrt{7}}(x-2)+2=-\frac{4+\sqrt{7}}{3}(x-2)+2$ で与えられる. これと ℓ との交点がA であるから連立して $-\frac{4+\sqrt{7}}{3}(x-2)+2=\frac{4-\sqrt{7}}{3}x \Leftrightarrow \frac{8}{3}x=\frac{14+2\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow x=\frac{7+\sqrt{7}}{4}$ を得る.　また、$y=\frac{4-\sqrt{7}}{3}\times\frac{7+\sqrt{7}}{4}=\frac{21-3\sqrt{7}}{12}=\frac{7-\sqrt{7}}{4}$ である.

答：ℓ : $y=\frac{4-\sqrt{7}}{3}x$, A$\left(\frac{7+\sqrt{7}}{4},\frac{7-\sqrt{7}}{4}\right)$

【別解】$y=kx$を円 C の方程式に代入して $D=0$ を利用すると $x=\frac{2(k+1)}{1+k^2}$ となるので、$D=0$ から k の値を求めて点Aの座標を求めてもよい.

(2) 円 C の図を描くと点(2, 3)を通るので、条件より、点 B(2, 3) であることがわかる.
$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{7+\sqrt{7}}{4},\frac{7-\sqrt{7}}{4}\right)$, $\overrightarrow{OB}=(2,3)$ であるから、$\Delta\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\left|3\times\frac{7+\sqrt{7}}{4}-2\times\frac{7-\sqrt{7}}{4}\right|=\frac{7+5\sqrt{7}}{8}$ を得る.

答：$\frac{7+5\sqrt{7}}{8}$

【別解】直線ℓ とx軸の正の向きとのなす角を θ とおくとき、OA＝$\sqrt{7}$ であるから

(1)より $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$ がわかる．また OB $= \sqrt{13}$ であるから、$\alpha = \angle$AOB

とおくと、$\cos(\theta+\alpha) = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin(\theta+\alpha) = \frac{3}{\sqrt{13}}$ を得る．加法定理を用いて $\sin\alpha$ につい

て解くと $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}+5}{4\sqrt{13}}$ が得られるので、ΔOAB $= \frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{7}+5}{4\sqrt{13}} = \frac{7+5\sqrt{7}}{8}$ を得る．

【3】

(1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$,

$g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $g''(x) = \frac{-2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$

より，

$y = f(x)$ は $x = 0$ で極大値かつ最大値 1 をとり、$y = 0$ が漸近線である．また、

$y = g(x)$ は $x = 0$ で極小値かつ最小値 0 をとり、$y = 1$ が漸近線である．

(以上は図を描く場合に必要であるが、必須ではない．省略可能)

$f(x) = g(x) \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$ であり、$-1 \leqq x \leqq 1$ において $f(x) - g(x) \geqq 0$

であるから、求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1}\left(-1+\frac{2}{1+x^2}\right)dx$$

$$= 2[-x]_0^1 + 4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx = -2 + 4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx \ .$$

ここで，第２項の積分は $x = \tan\theta$ とおいて置換積分すれば $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta = \frac{\pi}{4}$ を

得るから、結局、$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx = -2+\pi = \pi-2$ を得る．

答：$\pi - 2$

(2) $f'(\alpha) = \frac{-2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}$, $g'(\alpha) = \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}$ より

$\ell_1 : y = \frac{-2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha) + \frac{1}{1+\alpha^2}$, $\ell_2 : y = \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha) + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$ である．

答： $\ell_1 : y = \frac{-2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha) + \frac{1}{1+\alpha^2}$, $\ell_2 : y = \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha) + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$

(3) ℓ_1 とℓ_2 の交点のx座標を求める．

$$\frac{-2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha) + \frac{1}{1+\alpha^2} = \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha) + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

$\iff \frac{4\alpha}{(1+\alpha^2)^2}(x-\alpha) = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \iff 4\alpha x = 1-\alpha^4+4\alpha^2 \iff x = \frac{1+4\alpha^2-\alpha^4}{4\alpha}$ を得る．

条件より $\frac{1+4\alpha^2-\alpha^4}{4\alpha}=-\frac{11}{3}$ であるから、整理すると

$3\alpha^4-12\alpha^2-44\alpha-3=0$ を得る． α^4の係数と定数項の値より、解の候補として $\alpha=\pm1,\pm3$ が考えられるので代入して確かめると $\alpha=3$ が解であることがわかる．組立除法を用いて因数分解すると

$(\alpha-3)(3\alpha^3+9\alpha^2+15\alpha+1)=0$ となるが、$\alpha>1$ であったから、$\alpha=3$ が唯一の実数解である．このとき

$\ell_1 : y=\frac{-3}{50}(x-3)+\frac{1}{10}$ ， $\ell_2 : y=\frac{3}{50}(x-3)+\frac{9}{10}$ となる． 求める面積は

$$\int_{-\frac{11}{3}}^{3}\left\{\frac{3}{50}(x-3)+\frac{9}{10}-\left(\frac{-3}{50}(x-3)+\frac{1}{10}\right)\right\}dx=\int_{-\frac{11}{3}}^{3}\left\{\frac{3}{25}(x-3)+\frac{4}{5}\right\}dx$$

$$=\left[\frac{3}{50}(x-3)^2+\frac{4}{5}x\right]_{-\frac{11}{3}}^{3}=\frac{12}{5}-\frac{3}{50}\times\left(\frac{20}{3}\right)^2+\frac{4}{5}\times\frac{11}{3}=\frac{36-40+44}{15}=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}\ .$$

答：$\alpha=3$， 面積：$\frac{8}{3}$

【別解】$\alpha=3$ と ℓ_1,ℓ_2 を求めたら、囲む図形は三角形なので、その面積を S とすると $S=\frac{1}{2}\times\left(3-\left(-\frac{11}{3}\right)\right)\times\left(\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{3}$ としてもよい．