令和６年度
医学部一般選抜（N 全学統一方式第１期二次試験）解答
数学

【１】

(1)

$$\int_0^{\frac{2}{5}}(5x-3)^6dx=\left[\frac{1}{35}(5x-3)^7\right]_0^{\frac{2}{5}}=\frac{2186}{35}$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{3})\right]_0^{\frac{\pi}{12}}=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}$$

(3)

$$\int_1^{e}\log 2x\,dx=[x\log(2x)-x]_1^e=e\log(2e)-e-\log 2+1=(e-1)\log 2+1$$

(4)

$$\int_1^{2}\frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx=[\log|x^2+3x|]_1^2=\log 10-\log 4=\log\frac{5}{2}$$

解答欄

(1)	(2)	(3)	(4)
$\frac{2186}{35}$	$\frac{1}{4}$	$(e-1)\log 2+1$	$\log\frac{5}{2}$

【2】

(1)　$f'(x)=-\sin x\cdot 3(1+\cos x)^2+3\sin x$

$=-3\sin x\cos^2 x-6\sin x\cos x=-3\sin x\cos x\,(\cos x+2)$

答：$f'(x)=-3\sin x\cos x\,(\cos x+2)$

(2)　(1)より $f'(x)=-\frac{3}{2}\sin(2x)\,(\cos x+2)$　であるから，$0\leqq x\leqq\pi$ において

$f'(x)=0\iff x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ である。ここで $f(0)=4,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ f(\pi)=2$ であり，

$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき $f'(x)<0$　より $f(x)$ は $[0,\frac{\pi}{2}]$ で単調減少する。また、
$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき $f'(x)>0$　より $f(x)$ は $[\frac{\pi}{2},\pi]$ で単調増加する。従って、

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ は極小値である。

以上より $0 \leqq x \leqq \pi$ において $f(x) \geqq f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ が成り立つ。　□

【別解】(2)は $f(x)=\cos^3 x+3\cos^2 x=\cos^2 x(\cos x+3) \geqq 0$ としてもよい。

【3】

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\cos(2t)\right\}dt$$

$$=\left[\frac{t^2}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{t}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)dt\right\}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\left\{0-\frac{1}{2}\right\}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$$

答：$\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}t\sin(2t)\,dt=\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{2}t\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)dt\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4}+0\right\}=\frac{\pi}{8}$$

答：$\frac{\pi}{8}$

(3) $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t\cos^2 t-2xt\sin t\cos t+x^2 t\sin^2 t)\ dt$

$$=x^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\ dt-2x\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos t\ dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,dt$$

ここで,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,dt=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$ であるから,

$$f(x)=\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\right)x^2-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}=\frac{\pi^2+4}{16}\left(x-\frac{2\pi}{\pi^2+4}\right)^2+\frac{\pi^4-4\pi^2-16}{16(\pi^2+4)}$$

より, $f(x)$ は $x=\frac{2\pi}{\pi^2+4}$ のとき最小値 $\frac{\pi^4-4\pi^2-16}{16(\pi^2+4)}$ をとる。

答：$\frac{\pi^4-4\pi^2-16}{16(\pi^2+4)}$