リーマン幾何におけるタイヒミュウラー理論について

宇田川　誠一
東京都板橋区大谷口上町３０ー１
日本大学医学部数学教室

§**0.** 準備とタイヒミュウラー空間の定義

M をパラコンパクト、ハウスドルフ位相空間とし、E をバナッハ空間とする。M が**バナッハ多様体**とは、M の各点が E の開集合と同相な開近傍をもつときをいう。M が C^k-バナッハ多様体とは、$M=\cup_{i\in I}U_i$ なる座標近傍 $\{(U_i,\varphi_i)\mid i\in I\}$ があって、$U_i\cap U_j\neq\phi$ のとき、$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i\cap U_j)\longrightarrow\varphi_j(U_i\cap U_j)$ が C^k-微分同相のときをいう。E がヒルベルト空間のときは、M をヒルベルト多様体という。

以下、M はリーマン面を表すとする。このとき、$c=\{(U_i,\varphi_i)\mid i\in I\}$ を M の複素構造（complex structure）とよび、(M,c) で表す。$f:M\longrightarrow M$ を微分同相写像（diffeomorphism）とするとき、$f^*c=\{(f^{-1}(U_i),\varphi_i\circ f)\mid i\in I\}$ により M の新しい複素構造が定義される。$f:(M,f^*c)\longrightarrow(M,c)$ は正則同値写像である。

以下では、M をコンパクト・リーマン面とし、種数（genus）は２以上とする。

$\mathcal{C}$ を M 上の複素構造全体の集合とし、$\mathcal{D}$ を M から M への向きを保つ（orientation preserving）C^∞- 微分同相写像全体のなす群とする。

[$\mathcal{D}$ の $\mathcal{C}$ への作用]　$\mathcal{C}\times\mathcal{D}\ni(c,f)\longrightarrow f^*c\in\mathcal{C}$、すなわち、引き戻し（pull-back）により、$\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ に作用する。このとき、$[c]=[c']\iff c=f^*c'(f\in\mathcal{D})$ により同値類 $[c]$ を定めれば、それらの集合として、$\mathcal{C}/\mathcal{D}$ が定義されるが、これを M のリーマン・モジュライ空間とよぶ。また、

$$\mathcal{D}_0=\{\gamma\in\mathcal{D}\mid\gamma\quad\text{は恒等写像にホモトピック}\}$$

としたとき、$\mathcal{C}/\mathcal{D}_0$ を M のタイヒミュウラー（Teichmüller）モジュライ空間、あるいは、**タイヒミュウラー空間**とよび、$\mathcal{T}(M)$ で表す。この $\mathcal{T}(M)$ の幾何学的構造を微分幾何学的に調べることが以下の目的である。実際、次の定理を証明する：

定理**.** $\mathcal{T}(M)$ は、$(6p-6)$-次元のユークリッド空間に C^∞-微分同相である。ここで、p は、M の種数を表す。

[定義] $H^s(M)$ を、M 上の実数値関数 f で、s 回までの微分が distribution の意味で存在し、かつ、$D^sf\in L^2(M)$ を満たすようなもの全体のなす線形空間とする。これは、ソボレフノルム $\parallel f\parallel_s=\{\sum_{|k|\square s}\int_M\mid D^kf\mid^2 d\mu_g\}^{1/2}$ により、$C^\infty(M)$ を完備化した空間であり、ソボレフ空間とよばれる。記号の説明をしておくと、$k=(k_1,\cdots,k_n)$ のとき、$\mid k\mid=\sum_{i=1}^n k_i$ であり、$D^kf=\partial^{|k|}f/\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}$ （$x_1,\cdots,x_n$ は M の局所座標系）である。M がユーク

リッド空間のときは、これでよいのだが、一般の多様体の場合は、1 の分割を用いなければならない。∇ をリーマン多様体 (M,g) から決まる共変微分演算とすると、D の代わりに ∇ を用いればよい（cf. T. Aubin, "Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations", Springer-Verlag,Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 252, pp32-33）。

$\mathcal{H}^s(T_p^qM)$ を $H^s(M)$ に属する M 上の (p,q)-テンソル場全体のなす線形空間とし、$\mathcal{S}_2^s(M)$ を $H^s(M)$ に属する M 上の対称 $(0,2)$-テンソル場全体のなす線形空間とする。さらに、$\mathcal{S}_2(M) = \mathcal{S}_2^s(M) \cap C^\infty(M)$ とおく。また、$H_p^s(M)$ は、$H^s(M)$ の定義において、$D^sf \in L^p(M)$ としたものを表す（ソボレフノルムも、k 乗積分を用いる）。

[ソボレフの埋め込み定理]

$$H_p^s(M) \longrightarrow \begin{cases} L^{2p/(2-sp)} & \text{for} \quad sp < 2 \\ C^m(M) & \text{for} \quad 0 \,\square\, m < s - \frac{2}{p} \end{cases}$$

ソボレフの埋め込み定理、ヘルダーの不等式およびライプニッツの公式を用いることにより、$s > 1$ かつ $f, g \in H^s(M)$ ならば、$fg \in H^s(M)$ であることがわかる。$H^s(M)$-関数の 2 回微分まで、この性質を使用する必要があるため、以下では、$s > 3$ であるとする。

§1. $\mathcal{T}(M)$ の構造

[定義]　$\mathcal{A}^s = \{J \in \mathcal{H}^s(T_1^1M) \mid J_x^2 = -Id_x \quad (\text{任意の} \quad x \in M), \quad \text{任意の } X \in T_xM \text{に対して} (X, J_xX) \quad \text{は} T_xM \text{の} \textit{ oriented} \quad \textit{basis}\}$ とおき、$\mathcal{A} = \cap_s \mathcal{A}^s$ とおく。$\mathcal{A}$ は、C^∞-概複素構造全体のなす集合である。$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{R}^2$ の標準的概複素構造（standard almost complex structure）とし、写像 $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ を、$\Gamma((U,\varphi)) = d\varphi_x^{-1} \circ \hat{J} \circ d\varphi_x =: J_\varphi(x), (x \in U)$, により定める。このとき、つぎの定理が成り立つ：

定理 **1.1.** $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ は全単射写像である。

証明. Γ が単射であることを示す。$(V,\psi) \in \mathcal{C}$ のとき、$J_\psi(x) = d\psi_x^{-1} \circ \hat{J} \circ d\psi_x$ であるから、

$$\begin{aligned} J_\psi(x) = J_\varphi(x) &\Longleftrightarrow d(\varphi \circ \psi^{-1})\hat{J} d(\psi \circ \varphi^{-1}) = \hat{J} \\ &\Longleftrightarrow d(\psi \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \qquad (A, B \in \mathbf{R}) \\ &\Longleftrightarrow \ \psi \circ \varphi^{-1} \text{は正則写像（[}Q1\text{] を参照）} \end{aligned}$$

従って、(U,φ) と (V,ψ) は同じ $\mathcal{C}$ からとってきたものである。よって、Γ は単射である。Γ が全射であることは [Q5] で証明されている。　[証明終]

[$\mathcal{A}$ への $\mathcal{D}$-作用] $\mathcal{D} \ni f, \mathcal{A}^s \ni J$ にたいして、

$$(f^*J)_x = (df_x)^{-1} \circ J_{f(x)} \circ df_x$$

により、$\mathcal{D}$-作用が定義される。このとき、$d(\varphi \circ f)^{-1} \hat{J} d(\varphi \circ f) = df^{-1}(d\varphi^{-1} \hat{J} d\varphi) df$ により、

$$\Gamma(f^*c) = f^*\Gamma(c), \quad (c \in \mathcal{C})$$

が成り立つ。すなわち、Γ は $\mathcal{D}$-同変（equivariant）である。さて、集合として、$\mathcal{T}(M)=\mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ であることはわかったが、これに多様体の構造を入れたい。それには、まず $\mathcal{A}$ が M 上の C^∞-級 $(1,1)$ 型テンソル場全体のなす空間 $C^\infty(T_1^1M)$ の部分集合であることから、陰関数定理を用いて、その部分多様体であることを示したい、と考えたいところではあるが、実は、$C^\infty(T_1^1M)$ はバナッハ空間ではないので、陰関数定理が使えない。そこで、それを完備化した空間で考えていくわけである。しかし、$\mathcal{A}^s$ に作用するのは、$\mathcal{D}^s$ ではなく、$\mathcal{D}^{s+1}$ であることに注意しなければならない。

定理 **1.2.** $\mathcal{A}^s$ は $\mathcal{H}^s(T_1^1M)$ の C^∞-級部分多様体であって、

$$T_J\mathcal{A}^s=\{H\in\mathcal{H}^s(T_1^1M)\mid HJ+JH=0\}$$

が成り立つ。

[証明] $\Phi:\mathcal{H}^s(T_1^1M)\ni J\longrightarrow J^2\in\mathcal{H}^s(T_1^1M)$ という写像を考えれば、$\mathcal{A}^s=\Phi^{-1}(-Id)$ である。このとき、$D\Phi(J)H=HJ+JH$ より、$D\Phi(J)H$ は J と commute するが、そうでないものはもちろん存在するから、これは全射にはなり得ない。従って、陰関数定理を適用できない。そこで、以下のように５つのステップに分けて証明する：

(1) $J^2=-Id\Longleftrightarrow \mathrm{tr}J=0\quad\text{and}\quad\det J=1.$

(2) $\mathcal{N}:=\mathrm{tr}^{-1}(0)\subset\mathcal{H}^s(T_1^1M)$ は線形部分空間。よって、C^∞-部分多様体であり、

$$T_J\mathcal{N}=\{H\mid \mathrm{tr}H=0\}$$

が成り立つ。

(3) $\mathcal{M}:=\det^{-1}(1)\subset\mathcal{H}^s(T_1^1M)$ は、C^∞-部分多様体であり、

$$T_J\mathcal{M}=\{H\mid \mathrm{tr}(J^{-1}H)=0\}$$

が成り立つ。

(4) 任意の $J\in\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$ に対して、$T_J\mathcal{M}+T_J\mathcal{N}=\mathcal{H}^s(T_1^1M)$ ならば、$\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$ は $\mathcal{H}^s(T_1^1M)$ の C^∞-部分多様体であり、

$$T_J(\mathcal{M}\cap\mathcal{N})=T_J\mathcal{M}\cap T_J\mathcal{N}$$

が成り立つ。

(5) もし、$J^2=-Id$ ならば、

$$\mathrm{tr}H=0\quad\text{and}\quad\mathrm{tr}(JH)=0\iff JH+HJ=0$$

が成り立つ。

さて、(1) と (2) は明らかであろう。(3) は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mid_{t=0}\det(J+tH) &= \det(J)\cdot\frac{d}{dt}\mid_{t=0}\det(Id+tJ^{-1}H)\\ &= \det(J)\cdot\frac{d}{dt}\mid_{t=0}\det e^{tJ^{-1}H}\\ &= \det(J)\cdot\frac{d}{dt}\mid_{t=0} e^{\mathrm{tr}(tJ^{-1}H)}\\ &= \det(J)\cdot\mathrm{tr}(J^{-1}H) = \mathrm{tr}(J^{-1}H)\end{aligned}$$

より、$\mathcal{M}$ が C^∞-部分多様体になることを示すには、写像 $\det : \mathcal{H}^s(T_1^1M) \longrightarrow H^s$ を考えたとき、$J \in \mathcal{M}$ に対して、$(D_J\det)(H) = \mathrm{tr}(J^{-1}H) \in H^s$ が全射であることを示せばよい。任意の $\rho \in H^s$ が与えられたとき、$H := \frac{1}{2}\rho J \in \mathcal{H}^s(T_1^1M)$ と定めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(J^{-1}H) &= \rho\\ &= \frac{d}{dt}\mid_{t=0}\det(J+tH) = (D_J\det)(H)\end{aligned}$$

となる。陰関数定理より、$\mathcal{M}$ は C^∞-部分多様体であり、

$$\begin{aligned}T_J\mathcal{M} &= \mathrm{Ker}(D_J\det)\\ &= \{H \mid \mathrm{tr}(J^{-1}H) = 0\}\end{aligned}$$

となる。(4) については、仮定を満たすことを確かめるにとどめる（証明については、S. Lang "Analysis I+II", Addison-Wesley, 1968/69 を参照)。任意の $H \in \mathcal{H}^s(T_1^1M)$ は、

$$H = (H - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(H)Id) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(H)Id$$

と分解されるが、右辺の第一項は $T_J\mathcal{N}$ の元であり、第二項は $T_J\mathcal{M}$ の元である。最後に、(5) については、[Q2] を参照。 [証明終]

$\mathcal{M}^s = \{g \in S_2^s \mid g(u,u) > 0 \quad \text{for} \quad u \neq 0\}$ とおくと、これは S_2^s の開部分集合であるので、C^∞-部分多様体であり、その任意の点における接空間は S_2^s に一致する。そのなかで、スカラー曲率が -1 であるものの集合を $\mathcal{M}_{-1}^s$ で表す。さらに、$\mathcal{M} := \mathcal{M}^\infty$ とおき、そのなかで、スカラー曲率が -1 であるものの集合を $\mathcal{M}_{-1}$ で表す。

[$\mathcal{D}_0$-action on $\mathcal{M}$] $\mathcal{D}_0 \ni f, \mathcal{M}^s \ni g$ に対して、

$$(f^*g)_x(u,v) = g_{f(x)}(Df_x(u), Df_x(v))$$

により、$\mathcal{M}^s$ への $\mathcal{D}_0$ の作用を定義する。

[L_2-metric on $\mathcal{M}^s$] $\xi, \eta \in T_g\mathcal{M}^s \cong S_2^s$ に対して、

$$<<\xi,\eta>>_g = \int_M \xi\cdot\eta d\mu_g$$

により、L_2-計量を定める。ここに、

$$\xi \cdot \eta = \sum_{i,j,k,l} g^{ik} g^{jl} \xi_{ij} \xi_{kl}$$

である。このとき、

$$T_g \mathcal{M}^s = \left(S_2^s(g)\right)^c \oplus \left(S_2^s(g)\right)^T \quad （<< \quad , \quad >> \text{に関して直交直和）}$$

と分解される。ここに、

$$\begin{aligned} \left(S_2^s(g)\right)^c &= \{h \mid h = p \cdot g, \quad p \in H^s\} \\ \left(S_2^s(g)\right)^T &= \{h \mid \mathrm{tr}_g h = 0\} \end{aligned}$$

である。上付きの c は conformal（共形的）、T は traceless （トレースがゼロ）を意味する。

[Diffeomorphism : $\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s \cong \mathcal{A}^s$] $\mathcal{G}$ を C^∞-（ヒルベルト）Lie 群とし、C^∞- （ヒルベルト）多様体 $\mathcal{N}$ に右側から作用しているとする。すなわち、$A : \mathcal{G} \times \mathcal{N} \ni (a, x) \longrightarrow x \cdot a \in \mathcal{N}$ を右からの作用とする。さらに、$x \in \mathcal{N}$ に対して、$\mathcal{G}_x = \{x \cdot a \mid a \in \mathcal{G}\}$ とおく。

[定義] (1) 作用 A が proper であるとは、写像 $\widetilde{A} : \mathcal{G} \times \mathcal{N} \ni (a, x) \longrightarrow (x \cdot a, x) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ が proper （$\widetilde{A}^{-1}$(コンパクト集合) が コンパクト）であるときをいう。
(2) 作用 A が free であるとは、A が固定点（fixed point）を持たないとき（すなわち、ある x があって、$x \cdot a = x$ ならば、$a = Id$）をいう。次の結果は、よく知られている：

定理 **1.3.** もし、作用 A が *smooth, proper* かつ *free* であれば、以下のことが成り立つ：
(1) 任意の $x \in \mathcal{N}$ に対して、$\mathcal{G}_x$ は $\mathcal{N}$ の C^∞-閉部分多様体である。
(2) $\mathcal{N}/\mathcal{G}$ は C^∞-多様体である。
(3) $T_{[x]}(\mathcal{N}/\mathcal{G}) = \{X \in T_x\mathcal{N} \mid X \perp T_x\mathcal{G}_x\}$.
(4) $\pi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}/\mathcal{G}$ は C^∞-*submersion* （すなわち、$D\pi : T_x\mathcal{N} \longrightarrow T_{[x]}(\mathcal{N}/\mathcal{G})$ が全射）である。

ここで、$\mathcal{P}^s$ を、M 上の正値 H^s-関数全体の集合とすると、これは H^s の開部分集合であるから、$\mathcal{P}^s$ も（L^2-計量に関して）ヒルベルト多様体になっている。$f, g \in \mathcal{P}^s$ に対して、$f \cdot g \in \mathcal{P}^s$ （$s > 1$ のとき）となるから、$\mathcal{P}^s$ は C^∞-ヒルベルト Lie 群である。
[$\mathcal{P}^s$-action on $\mathcal{M}^s$]

$$\mathcal{P}^s \times \mathcal{M}^s \ni (p, g) \longrightarrow p \cdot g \in \mathcal{M}^s$$

により、作用が定義される。ここで、$\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ の元を $[g]$ により表す。すなわち、$g \in \mathcal{M}^s$ であって、$[g] = [g']$ とは、ある $p \in \mathcal{P}^s$ が存在して、 $g = p \cdot g'$ であるときに限るときをいう。この $\mathcal{P}^s$-action は C^∞-級であり、かつ、free である。また、proper 性については、$p_i g_i \to \hat{g} \quad \text{in} \quad M$ かつ $g_i \to g \quad \text{in} \quad M$ とすると、ある $p \in \mathcal{P}^s$ が存在して、$\hat{g} = p \cdot g$、従って、$p_i \to p$ が得られることからわかる。
[$\mathcal{D}_0$-action on $\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$] $f \in \mathcal{D}_0, [g] \in \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ に対して、$f^*[g] = [f^*g]$ により、作用を定めると、これは、well-defined である。

定理 **1.4.** $\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ は $\mathcal{A}^s$ に C^∞-微分同相である。

[証明] 写像 $\Phi:\mathcal{M}^s \longrightarrow \mathcal{A}^s$ を、$\Phi(g)=-g^{-1}\mu_g$ により定める。ここで、

$$\mu_g(X,Y)=\pm\sqrt{\det\begin{pmatrix} g(X,X) & g(X,Y) \\ g(Y,X) & g(Y,Y)\end{pmatrix}}$$

であり、平方根の前の符号は、(X,Y) が正の向きの基底ならば $+$ を、負の向きの基底ならば $-$ を採用するものとする。このとき、

$$\Phi(g)^i_j=-\sum_k g^{ik}(\mu_g)_{kj} \iff g(u,\Phi(g)v)=-\mu_g(u,v)$$

が成り立つ（[Q4] を参照）。この Φ の性質として：

(1) $\Phi(g)\in\mathcal{A}^s \quad (g\in\mathcal{M}^s)$.

(2) $J=\Phi(g)$ は、g に関して Hermitian、すなわち、$g(Ju,Jv)=g(u,v)$.

(3) $\Phi(p\cdot g)=\Phi(g)$ 　（任意の $p\in\mathcal{P}^s$）.

(4) もし、$\Phi(g_1)=\Phi(g_2)$ ならば、ある $p\in\mathcal{P}^s$ が存在して、$g_1=p\cdot g_2$ となる。

(5) Φ は、$\mathcal{A}^s$ への上への写像である。

(6) $\Phi:\mathcal{M}^s\longrightarrow\mathcal{A}^s$ は C^∞-submersion である。さらに、$\mathrm{Ker}(D\Phi(g))=\left(S^s_2(g)\right)^c$ が成り立つ。

まず、(1) であるが、共形座標系を用いて、$g_{ij}=\lambda\delta_{ij}$ とすると、$g^{ij}=\lambda^{-1}\delta_{ij}, \mu_g=\begin{pmatrix}0 & \lambda \\ -\lambda & 0\end{pmatrix}$ となる。これらより、$\Phi(g)=\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ となる。(3) についても同様に、$\mu_{pg}=\begin{pmatrix}0 & p\lambda \\ -p\lambda & 0\end{pmatrix}, (pg)^{-1}=\begin{pmatrix}(p\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (p\lambda)^{-1}\end{pmatrix}$ となるので、$\Phi(pg)=\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\Phi(g)$ となる。(2) については、

$$\begin{aligned} g(Ju,Jv) &= g(\Phi(g)u,\Phi(g)v) \\ &= \sum_{i,j,k,l}\Phi^j_i u^i \Phi^l_k v^k g_{jl} \\ &= \lambda\sum_{i,j,k}\Phi^j_i\Phi^j_k u^i v^k \\ &= \lambda\sum_{i,k}\delta_{ik}u^i v^k = g(u,v)\end{aligned}$$

より、成り立つことがわかる。(4) は、２次の歪対称行列のなす空間は１次元であるから、ある $p\in\mathcal{P}^s$ が存在して$\mu_{g_1}=p\mu_{g_2}$ と表せる。すると、

$$\begin{aligned}\Phi(g_1)=\Phi(g_2) &\iff g_1^{-1}\mu_{g_1}=g_2^{-1}\mu_{g_2} \\ &\iff g_1=pg_2\end{aligned}$$

が得られる。(5) は、任意の $J\in\mathcal{A}^s$ が与えられたとき、$\hat{g}\in\mathcal{M}^s$ を任意に一つ選ぶ。そして、$g\in\mathcal{M}^s$ を、

$$g(u,v)=\hat{g}(u,v)+\hat{g}(Ju,Jv)$$

により定めると、$g(Ju,Jv) = g(u,v), g(u,Ju) = 0$ が成り立つ。従って、$\mu_g(u,Ju) = g(u,u) \quad (u \neq 0)$ である。一方、任意の $v \in T_xM$ は、$v = au + bJu$ と表せるから、[Q4] を考慮して、

$$\mu_g(u,v) = b\mu_g(u,Ju) = bg(u,u) \quad ,$$
$$g(u,Jv) = -bg(u,u) = -\mu_g(u,v) = g(u,\Phi(g)v) \quad ,$$

となり、$J = \Phi(g)$ が得られる。最後に (6) を証明しよう。$h = (h_{ij}) \in T_g\mathcal{M}^s$ に対して、$h^i_j = \sum_k g^{ik}h_{kj}, h^{ij} = \sum_{k,l} g^{il}g^{jk}h_{lk}$ により、h に付随した $(2,0)$-テンソル、$(1,1)$-テンソルを表す。次に、$\mu(g) = \sqrt{\det(g_{ij})} = (\mu_g)_{12}$ とおく。$\Phi(g) = -g^{-1}\mu_g$ の変分を求める；

$$\begin{aligned}
D(\mu_g)_{12} &= D\mu(g) \\
&= \frac{1}{2\mu(g)}\big(\det\begin{pmatrix} h_{11} & g_{12} \\ h_{21} & g_{22}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} g_{11} & h_{12} \\ g_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\big) \\
&= \frac{\mu(g)}{2}\big\{\det\big(\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} & g_{12} \\ h_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\big) + \det\big(\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & h_{12} \\ g_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\big)\big\} \\
&= \frac{\mu(g)}{2}\big\{\det\begin{pmatrix} h^1_1 & 0 \\ h^2_1 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & h^1_2 \\ 0 & h^2_2\end{pmatrix}\big\} = \frac{1}{2}\mu(g)(\mathrm{tr}_g h) \quad ,
\end{aligned}$$

より、

$$D\mu_g = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g h)\mu_g$$

を得る。次に、

$$Dg^{ij}(h) = -\sum_{k,l} g^{il}g^{jk}Dg_{kl}(h) = -\sum_{k,l} g^{il}g^{jk}h_{kl} = -h^{ij}$$

であるから、以上より、$J = \Phi(g)$ とおいたとき、

$$\begin{aligned}
D\Phi(g)^i_j(h) &= D(-\sum_k g^{ik}(\mu_g)_{kj})(h) \\
&= \sum_k h^{ik}(\mu_g)_{kj} - \sum_k g^{ik}\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g h)(\mu_g)_{kj} \\
&= -\sum_l h^i_l J^l_j + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g h)J^i_j \\
&= -\big(\big(H - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}H)Id\big)J\big)^i_j
\end{aligned}$$

となる。ここで、$H = (h^i_j)$ である。このことから、Φ は C^∞-級写像であることがわかる。また、

$$\mathrm{Ker}(D\Phi(g)) = \{h \mid H = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}H)Id\} = \big(S^s_2(g)\big)^c$$

が得られる。あとは、$D\Phi(g)$ が全射であることを示せばよい。それには、任意の $K \in T_J\mathcal{A}^s = \{K \mid KJ + JK = 0\}$ に対して、ある $h \in T_{[g]}(\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s)$ が存在して $(h \in \big(S^s_2(g)\big)^T =$

$\{h \mid \mathrm{tr}_g h = 0\}$ としてよい）、$K = -(H - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}H)Id)J = -HJ$ を示せばよい。いま、$T_J\mathcal{A}^s \ni L \longrightarrow -LJ \in T_J\mathcal{A}^s$ は同型写像であるから、ある $L \in T_J\mathcal{A}^s$ が存在して、$K = -LJ$ と書ける。そこで、$gL \in \left(S_2^s(g)\right)^T$ を示せばよい。しかし、これは $LJ + JL = 0$ であることから従う。 [証明終]

[$\Phi : \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s \longrightarrow \mathcal{A}^s$ は $\mathcal{D}^{s+1}$-equivariant] これは、

$$\begin{aligned}\Phi(f^*[g]) &= \Phi([f^*g]) = -(f^*g)^{-1}\mu_{f^*g} \\ &= -(f^*g)^{-1}f^*\mu_g = -f^*(g^{-1}\mu_g) = f^*\Phi(g) = f^*\Phi([g])\end{aligned}$$

よりわかる。

さて、$g \in \mathcal{M}^{s+2}$ に対して、g のスカラー曲率（＝ガウス曲率の２倍）を $R(g) \in H^s$ で表すとき、つぎの結果が成り立つ：

定理 **1.5(Poincaré).** M を種数が $p(>1)$ のコンパクト・リーマン面とする。任意の $g \in \mathcal{M}^s$ が与えられたとき、ある $\lambda \in \mathcal{P}^s$ が一意的に存在して、 $R(\lambda g) \equiv -1$ となる。

この定理は山辺の問題のきっかけとなったかどうかは定かではないが、その特別な場合であり、応用上極めて重要であると思われるので、証明を与えることにする。しかし、この定理を証明するには、いくつかの準備を必要とする。

$\mathcal{M}^s_{-1} = \{g \in \mathcal{M}^s \mid R(g) \equiv -1\}$ とおく。すると、定理 1.5 の主張より、$\mathcal{M}^s_{-1} \cong \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ （全単射）である。実際、任意の $[g] \in \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ が与えられたとき、$\lambda g \in \mathcal{M}^s_{-1}$ となる $\lambda \in \mathcal{P}^s$ がただ一つ存在するからである。

$\mathcal{X}^s(M)$ により、M 上の H^s-ベクトル場全体の集合を表す。$X, Y \in \mathcal{X}^s(M)$ に対して、

$$<< X, Y >>_{L^2} = \int_M g(X,Y)d\mu_g$$

により、$\mathcal{X}^s(M)$ 上の L^2-計量を定義する。次に、$v \in H^s$ に対して、

$$\left(\nabla_g v\right)^i = \sum_j g^{ij}\frac{\partial v}{\partial x^j}$$

により、H^{s-1}-ベクトル場 $\nabla_g v \in \mathcal{X}^{s-1}(M)$ を定義する。ここで、$\delta_g : \mathcal{X}^s(M) \longrightarrow H^{s-1}$ を

$$<< \delta_g X, v >>_{L^2} = - << X, \nabla_g v >>_{L^2}$$

により定義する。1-form ω に対しては、

$$\delta_g\omega = \delta_g X_\omega$$

と定める。ただし、X_ω は　$\omega(Y) = g(Y, X_\omega)$ により定義される、ω に付随したベクトル場である。そして、

$$\Delta_g v = \delta_g\nabla_g v = -\delta_g\delta_g^* v$$

とおく。ただし、δ_g^* は、L^2-計量に関する、δ_g の随伴作用素（adjoint operator）である。このとき、次が成り立つ：

命題 **1.1.** 任意の $X \in \mathcal{X}^s(M)$ が与えられたとき、ある $v \in H^{s+1}$ が存在して、

$$X = X^0 + \nabla_g v$$

と分解される。ここに、$\delta_g X^0 = 0$ である。

[証明] 主張にあるような分解が成り立つとすると、$\delta_g X = \delta_g \nabla_g v = \Delta_g v$ である。Δ_g は自己随伴作用素である（すなわち、$\mathrm{Ker}\Delta_g \perp \mathrm{Im}\Delta_g$）から、$\delta_g X \perp \mathrm{Ker}\Delta_g$ を示せばよい。しかるに、M がコンパクトであることから $\mathrm{Ker}\Delta_g$ は　定数値関数のみからなる。従って、明らかに$\delta_g X \perp \mathrm{Ker}\Delta_g$ が成り立ち、$\delta_g X \in \mathrm{Im}\Delta_g$ である。これより、ある $v \in H^{s+1}$ が存在して、$\delta_g X = \Delta_g v = \delta_g \nabla_g v$、すなわち、

$$\delta_g (X - \nabla_g v) = 0$$

である。そこで、$X - \nabla_g v = X^0$ と置けばよい。 [証明終]

[定義] $\alpha_g : \mathcal{X}^\infty(M) \longrightarrow S_2$ を、$\alpha_g(X) = L_X g$ により定める。ここに、L_X は、X に関するリー微分を表す。

ここで、次が成り立つ（[Q6] を参照）:

$$<< \alpha_g(X), h >>_{L^2} = - << X, \delta_g h >>_{L^2} \quad .$$

定理 **1.6.** $g \in \mathcal{M}^{s+1}$ とする。任意の $h \in S_2^s$ に対して、次のような L^2-直交分解が存在する :

$$h = h^0 + L_X g \quad ,$$

ここに、$h^0, L_X g \in S_2^s$ であり、$\delta_g h^0 = 0$ である。さらに、$p > 1$ ならば、X は一意的である。

[証明] $\delta_g h = \delta_g L_X g$ を解く。[Q6] を用いて、

$$\begin{aligned} << L_X g, h >> &= << \alpha_g(X), h >> \\ &= - << X, \delta_g h >> = - << \delta_g^* X, h >> \end{aligned}$$

より、

$$L_X g = -\delta_g^* X \tag{1.1}$$

である。すると、$\delta_g h = \delta_g L_X g = -\delta_g \delta_g^* X$ であるから、$\delta_g h \in \mathrm{Im}(\delta_g \delta_g^*) \perp \mathrm{Ker}(\delta_g \delta_g^*)$ となる。従って、$\delta_g h \perp \mathrm{Ker}(\delta_g \delta_g^*)$ を示せばよい。そこで、もし、$\delta_g \delta_g^* X = 0$ ならば、M がコンパクトであることから、$\delta_g^* X = 0$ となり、よって、(1.1) により、$L_X g = 0$ が得られる。そこで、

$$\begin{aligned} << \delta_g h, X >> &= - << h, \alpha_g(X) >> \\ &= - << h, L_X g >> = 0 \end{aligned}$$

が得られるので、$\delta_g h \perp \mathrm{Ker}(\delta_g \delta_g^*)$ が得られた。最後に、X の一意性についてであるが、いま、

$$
\begin{aligned}
h &= h^0 + L_{X_1} g \\
&= \hat{h}^0 + L_{X_2} g
\end{aligned}
$$

と二通りに表せたとすると、明らかに、$h^0 = \hat{h}^0, L_{X_1} g = L_{X_2} g$ であるが、後者より、$L_{(X_1 - X_2)} g = 0$ が得られ、従って、 $X_1 - X_2$ はキリング・ベクトル場である。しかるに、$p > 1$ ならば、キリング・ベクトル場はゼロのみであることが知られているので、$X_1 \equiv X_2$ である。 [証明終]

以上の準備のもとに、定理 1.5. を証明しよう：

[定理 1.5 の証明] 共形座標系を選び、$g_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ とする。このとき、

$$
\begin{cases}
R(g) = -\dfrac{1}{\lambda} \Delta \log \lambda \qquad (\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}), \\
\quad \Delta_g = \dfrac{1}{\lambda} \Delta
\end{cases}
$$

である。そこで、$R(\rho g) \equiv -1$ となる ρ を捜す。$\rho = e^v$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
R(e^v g) &= -\frac{1}{\lambda e^v} \Delta \log(\lambda e^v) \\
&= -\frac{1}{\lambda e^v} \big(\Delta \log \lambda + \Delta v \big) \equiv -1
\end{aligned}
$$

より、

$$
(*) \qquad -\Delta_g v + R(g) + e^v = 0
$$

が得られる。そこで、

$$
I(v) = \frac{1}{2} \int_M g(\nabla_g v, \nabla_g v) d\mu_g + \int_M \big(R(g) v + e^v \big) d\mu_g
$$

とおく。右辺の第一項は、関数 v のディリクレ・エネルギー（Dirichlet energy）と呼ばれ、$E(g, v)$ という記号で表すことにする。簡単な計算により、I のオイラー＝ラグランジェ（Euler-Lagrange）方程式が $(*)$ に一致することが確かめられる。I を最小化して $(*)$ の解 v を見つけたい（この方法を、**直接法**（direct method）とよぶ)。しかし、H^1 全体で考えると、I は有界でないので解を見つけられなくなってしまう。そこで、適当な部分集合の見当をつけるために、x_0 を v が最大値を取る点とする。すると、$-\Delta_g v(x_0) \geq 0$、従って、$(*)$ より

$$
\begin{aligned}
e^{v(x_0)} &\square -R(g)(x_0) \\
&\square -\mathrm{Min}_M R(g) \\
&\square | \mathrm{Min}_M R(g) | \neq 0 \quad \text{（ガウス＝ボンネの定理より）}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$\begin{aligned} v(x) &\square\ v(x_0) \\ &\square\ \log \mid \mathrm{Min}_M R(g) \mid =: \xi \end{aligned}$$

となり、ξ が $(*)$ の解であるような v の上限ということになる。そこで、

$$C = \{v \in H^1 \mid E(g, v) < \infty, \quad v(x) \ \square\ 1 + \xi \quad a.e.\}$$

とし、この C 上で I の minimizer v を捜す。任意の $u \in H^1$ を、$u = u_0 + m(u)$ と表す。ここで、$\int_M u_0 d\mu_g = 0$ であり、

$$m(u) = \frac{\int_M u d\mu_g}{\int_M d\mu g}$$

は、u の平均値と呼ばれる。

$$\| u \| = \sqrt{E(g, u)} + \mid m(u) \mid$$

とおくと、$\| \cdot \|$ はノルムを定める（[Q7] を参照）。 まず、$I(u)$ が下に有界であることを示す。λ_1 を $-\Delta_g$ の第一固有値とすると、Minimum principle より、

$$E(g, u) \geq \frac{\lambda_1}{2} \int_M u_0^2 d\mu_g$$

であるから、

$$\begin{aligned} I(u) &\geq E(g, u_0) + \int_M R(g) u_0 d\mu_g + m(u) \int_M R(g) d\mu_g \\ &\geq E(g, u_0) - \int_M \{\frac{1}{\lambda_1} R(g)^2 + \frac{\lambda_1}{4} u_0^2\} d\mu_g + 4\pi m(u) \mathcal{X}(M) \\ &\geq \frac{1}{2} E(g, u_0) - \frac{1}{\lambda_1} \int_M R(g)^2 d\mu_g + 4\pi m(u) \mathcal{X}(M) \end{aligned} \tag{1.2}$$

を得る（$\mathcal{X}(M)$ は M のオイラー数を表し、今の場合、負である）ので、よって、C 上で $I(u)$ は下に有界である（$m(u) \ \square\ 1 + \xi$ に注意）。各最小列 (v_n)（すなわち、$I(v_n) \to \mathrm{inf} I(v)$）がノルム $\| \cdot \|$（これは H^1-ノルムと同等なノルムである）に関して有界であることを示そう。$m(u) > 0$ のときは、$0 < \mid m(u) \mid = m(u) < 1 + \xi$ であり、u が最小列を動くとき、(1.2) は $E(g, u)$ の上限を与え、従って、ノルム $\| u \|$ の上限を与える。また、$m(u) \ \square\ 0$ のときは、(1.2) の最後の右辺の第三項は、$4\pi \mid m(u) \mid\mid \mathcal{X}(M) \mid$ であり、u は定数でないとしてよいから、ある $1 > C > 0$ が存在して、$\sqrt{E(g, u_0)} \geq 8\pi C \mid \mathcal{X}(M) \mid$ とできる。これより、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} E(g, u_0) + 4\pi \mid m(u) \mid\mid \mathcal{X}(M) \mid \\ &\geq 4\pi C \mid \mathcal{X}(M) \mid \sqrt{E(g, u_0)} + 4\pi \mid m(u) \mid\mid \mathcal{X}(M) \mid C \\ &\geq 4\pi C \mid \mathcal{X}(M) \mid (\sqrt{E(g, u_0)} + \mid m(u) \mid) \end{aligned}$$

となり、やはり、(1.2) は $\| u \|$ の上限を与えることがわかる。従って、ノルム $\| \cdot \|$ に関して一様収束する部分列をとることにより、u が任意の最小列を動くとき、$I(u)$ は下半連続であることが示される（cf. D.Gilbarg-N.Trudinger, "Elliptic Partial Differential Equations of second order", Springer, pp290-291）。これより、minimizer v が C 上に存在することがわかる。次に、$v \in \mathrm{Int}(C)$ を示す。それには、まず C が凸（convex）であることに注意。実際、$v \,\square\, 1+\xi, w \,\square\, 1+\xi$ とすれば、$t \in [0,1]$ のとき、$tw+(1-t)v \,\square\, t(1+\xi)+(1-t)(1+\xi) = 1+\xi$ となるからである。v が C 上で minimizer であることにより、

$$I(v) \,\square\, I(tw + (1-t)v) = I(v + (w-v)t)$$

が任意の $t \in [0,1]$ に対して成り立つ。従って、

$$\frac{d}{dt} \mid_{t=0} I(v + t(w-v)) \geq 0$$

より、

$$\text{(1.3)} \qquad \int_M g(\nabla_g v, \nabla_g (w-v)) d\mu_g + \int_M (R(g) + e^v)(w-v) d\mu_g \geq 0$$

が任意の $w \in C$ に対して成り立つ。そこで、$w = \min(v, \xi)$ ととる。$v(x) \,\square\, \xi$ となる点 x では $w(x) = v(x)$ であり、それ以外の点 $\{x \mid v(x) > \xi\}$ では、$w(x) = \xi =$ 定数　である。さらに、そこでは、$\nabla_g w = 0$ となっている。従って、(1.3) より、

$$\text{(1.4)} \qquad \int_{\{v(x)>\xi\}} g(\nabla_g v, \nabla_g v) d\mu_g + \int_{\{v(x)>\xi\}} (R(g) + e^v)(v-\xi) d\mu_g \,\square\, 0$$

を得る。一方、ξ の定義より、

$$R(g) + e^\xi = R(g) + \mid \mathrm{Min}_M R(g) \mid \geq 0$$

であるから、従って、$\{x \mid v(x) > \xi\}$ 上で $R(g) + e^v > 0$ となるが、これと (1.4) より、$\{x \mid v(x) > \xi\}$ は測度 0 の集合でなければならない。よって、$v(x) \,\square\, \xi \quad a.e.$ となり、$v \in \mathrm{Int}(C)$ であることがわかった。以上より、この v は $(*)$ の（弱）解である。

[Regularity] v は、$\Delta_g v = R(g) + e^v$ の弱解とする。$g \in \mathcal{M}^s$ に対して、$R(g) \in H^{s-2}$ である。$v \in C$ より $e^v \in L^2$ である。これらより、$R(g) + e^v \in L^2 \quad (s > 3)$ が得られる。従って、v の満たす方程式より、 $v \in H^2$ である。よって、また $R(g) + e^v \in H^2$ であり、$v \in H^4 \quad (s > 3)$ が得られる、というようにして、最終的には、$v \in H^s$ が得られる。

[解 v の一意性] v_1, v_2 を二つの解（$v_1, v_2 \in H^s \subset C^2 \quad (s > 3)$）とすると、

$$\begin{cases} -\Delta_g v_1 + R(g) + e^{v_1} = 0 \\ -\Delta_g v_2 + R(g) + e^{v_2} = 0 \end{cases}$$

より、$\Delta_g (v_1 - v_2) = e^{v_1} - e^{v_2}$ が成り立つ。ここで、x_0 を、$v_1 - v_2$ が最大値をとる点とすると、x_0 において、$\Delta_g (v_1 - v_2) \,\square\, 0$ が成り立つ。従って、$e^{v_1(x_0)} \,\square\, e^{v_2(x_0)}$ が成り立ち、$(v_1 - v_2)(x_0) \,\square\, 0$、従って、$v_1 - v_2 \,\square\, 0$ である。また、v_1 と v_2 を入れ換えても同じ議論が使えるから、結局、$v_1 \equiv v_2$ であることがわかる。 [証明終]

次に、C^∞-級微分同相 $\mathcal{M}^s_{-1} \cong \mathcal{M}^s / \mathcal{P}^s$ を示そう。そのために、まず次を示す：

定理 **1.7.** $\mathcal{M}^s_{-1}$ は $\mathcal{M}^s$ の C^∞-部分多様体である。

[証明] C^∞-級写像 $R:\mathcal{M}^s \ni g \longrightarrow R(g) \in H^{s-2}$ を考える。このとき、$\mathcal{M}^s_{-1} = R^{-1}(-1)$ である。
[Claim] もし、ある $g_0 \in \mathcal{M}^s$ が存在して、$R(g_0) = -1$ ならば、

$$DR(g_0) : T_{g_0}\mathcal{M}^s \cong S^s_2 \longrightarrow H^{s-2}$$

は全射である。

この [Claim] が言えれば、陰関数定理により、$\mathcal{M}^s_{-1}$ は $T_g\mathcal{M}^s_{-1} \cong \mathrm{Ker}(DR(g))$ である、$\mathcal{M}^s$ の C^∞-部分多様体であることがわかる。まず、

$$DR(g_0)h = -\Delta_{g_0}(\mathrm{tr}_{g_0}h) + \delta_{g_0}\delta_{g_0}h + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{g_0}h \tag{1.5}$$

が成り立つ（[Q8] を参照）。結果が正しいとすれば、$T_{g_0}\mathcal{M}^s_{-1} \cong \left(S^s_2(g)\right)^T$ となるはずであるから、$h = \lambda g_0 \quad (\lambda \in H^s)$ の形のものだけを考えれば十分である。このとき、$\delta_{g_0}\delta_{g_0}(\lambda g_0) = \Delta_{g_0}\lambda$ より、

$$DR(g_0)(\lambda g_0) = -\Delta_{g_0}\lambda + \lambda$$

が得られる。ここで、$(1-\Delta_g)$ は、自己随伴作用素であり、Fredholm alternative より、$(1-\Delta_g)$ が単射であることと、$(1-\Delta_g)$ が全射であることは同値である（いま、$H^s \subset C^2$ であるから、ストークスの定理より、この事実は簡単に出る）。しかも、$(1-\Delta_g)$ は単射であることは、ストークスの定理を用いてわかるので、$(1-\Delta_g) : H^s \longrightarrow H^{s-2}$ は全射、従って、$DR(g_0)$ は全射である。これで定理は証明された。 [証明終]

定理 **1.8.** $\pi_{-1} = \pi\,|_{\mathcal{M}^s_{-1}} : \mathcal{M}^s_{-1} \longrightarrow \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ は $\mathcal{D}^{s+1}$-*equivariant* C^∞-級微分同相写像である。

[証明] $\pi_{-1} = \pi\,|_{\mathcal{M}^s_{-1}} : \mathcal{M}^s_{-1} \longrightarrow \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ は、定理 1.5 により全単射である。よって、$D\pi_{-1}$ が同型写像であることを示せばよい。まず、

$$T_{[g]}(\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s) \cong T_g\mathcal{M}^s/T_g\mathcal{P}^s = \{[h] \mid h \in S^s_2\} \quad , \qquad [h] = h + \lambda g \quad (\lambda \in H^s).$$

従って、

$$D\pi_{-1}(g)h = [h] = h + \lambda g$$

である。ここで、$T_g\mathcal{M}^s_{-1} \cong \mathrm{Ker}(DR(g))$ より（定理 1.7 の [Claim] を参照）、任意の $[h] \in T_{[g]}(\mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s)$ に対して、$h + \lambda g \in \mathrm{Ker}(DR(g))$ となる $\lambda \in H^s$ が一意的に存在することを示す。そこで、

$$DR(g)(h + \lambda g) = 0$$

を解く。ここで、

$$h + \lambda g = \bigl(h - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g h)g\bigr) + \bigl(\lambda + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g h)\bigr)g$$

であるから、右辺の第一項を改めて h とし、第二項を改めてλg ととりなおすことにより、$\mathrm{tr}_g h = 0$ としてよい。(1.5) より、

$$DR(g)(h + \lambda g) = \delta_g \delta_g h - \Delta_g \lambda + \lambda = 0$$

であり、この方程式の解が一意的に存在することを示す。すると、$(1 - \Delta_g)\lambda = -\delta_g \delta_g h$ であり、$(1 - \Delta_g)$ は同型写像であったから、そのような λ は一意的に存在する。以上より、$D\pi_{-1}$ は同型写像であることが示された。最後に：
[$\mathcal{D}^{s+1}$-equivariance] まず、$R(f^*g) = f^*R(g) = R(g) \circ f$ より、

$$R(g) \equiv -1 \iff R(f^*g) \equiv -1$$

であるから、$\mathcal{D}^{s+1}$ は $\mathcal{M}^s_{-1}$ に作用する。そして、

$$\pi_{-1}(f^*g) = [f^*g] = f^*[g] = f^*\pi_{-1}(g)$$

より、π_{-1} の $\mathcal{D}^{s+1}$-equivariance がわかる。 [証明終]

次の目標は、C^∞-級微分同相 $\mathcal{T}(M) \cong \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ を示すことである。

§2. Teichmüller 空間の構成

$\mathcal{M}^s_{-1}/\mathcal{D}^{s+1}_0$ が多様体であることを示すには、$\mathcal{D}^{s+1}_0$ が $\mathcal{M}^s_{-1}$ に free かつ proper に作用することを示す（しかし、この作用は C^∞-級ではない。実際、この作用の微分写像には、f の微分も入ってくるので、$f \in \mathcal{D}_0$ でなければ C^∞- 級にならない）。
[Free 性] $f \in \mathcal{D}^{s+1}_0$ をとり、$f^*g = g$ かつ $f \neq Id$ であると仮定して、矛盾を導く。

$c(g)$ により、g に付随した複素構造を表すとすると、

$$f^*c(g) = c(f^*g) = c(g)$$

（$\mathcal{C} \cong \mathcal{A} \cong \mathcal{M}/\mathcal{P} \cong \mathcal{M}_{-1}$ はすべて、$\mathcal{D}$-equivariant 全単射であることに注意）より、$f : (M, c(g)) \longrightarrow (M, c(g))$ は正則写像（holomorphic map）である。一方、恒等写像（Identity map）も正則写像であるから、一致の定理より、$f = Id$ となるのは、M の孤立点のみである。すなわち、f の固定点（fixed point）は孤立点のみからなる。そこで、
[定義] f の fixed point z_0 が、非退化（non-degenerate）であるとは、$Id - Df(z_0) : T_{z_0}M \longrightarrow T_{z_0}M$ が同型写像であるときをいう。
f は正則写像であるから、$Df(z_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ という形に表せる。ここで、$\det(Id - Df(z_0)) = (1 - A)^2 + B^2$ であるから、$\det(Id - Df(z_0)) = 0$ とすると、$Df(z_0) = Id$ かつ

$f(z_0)=z_0$ である。ゆえに、z_0 の近傍で $f=Id$ であるから、$f\equiv Id$ となり、これは矛盾である。従って、特に $\det(Id-Df(z_0))>0$ が成り立つ。ここで、次が必要である：
[Lefshetz fixed point Theorem] (cf. Griffiths-Harris,"Principles of Algebraic Geometry", pp419-421).

$$\sum_{f(z_0)=z_0}\mathrm{sgn}\big(\det(Id-Df(z_0))\big)=\sum_i(-1)^i\mathrm{tr}f_i^* \tag{2.1}$$

が成り立つ。ここに、$f_i^*:H^i(M,\mathbf{R})\to H^i(M,\mathbf{R})$ は、$\mathbf{R}$-係数のド・ラム（de Rham）コホモロジー間の準同型写像（実際、i-form の f による引き戻しである）であり、(2.1) の右辺は、Lefschetz 数と呼ばれ、これはホモトピー不変量である。
さて、いま f は Id にホモトピックであったから、Lefschetz 数がホモトピー不変量であることから、

$$\sum_i(-1)^i\mathrm{tr}f_i^*=\sum_i(-1)^i\mathrm{dim}H^i(M,\mathbf{R})=\mathcal{X}(M)<0$$

となり、結局、f は fixed points をもつ。しかし、$\det(Id-Df(z_0))>0$ であるから、これは Lefschetz fixed point Theorem に矛盾する。従って、$f=Id$ でなければならない。
[別証明] $f:(M,c(g))\longrightarrow(M,c(g))$ は正則写像であるから、とくに、調和写像（３節を参照）にもなっている。一方、$Id:(M,c(g))\longrightarrow(M,c(g))$ も調和写像である。一般論で、負曲率多様体への調和写像は各ホモトピー類のなかで一意的に存在する（３節、[Q11]、[Q12] を参照）ことが知られているので、 $f\in\mathcal{D}_0^{s+1}$ より、$f=Id$ がわかる。
[Proper 性] 次の定理より、Proper 性は示される（[Q9] を参照）：

定理 2.1. *$\mathcal{D}^{s+1}$ は $\mathcal{M}^s$ に proper に作用する。そして、$\mathcal{D}$ は $\mathcal{M}$ に proper に作用する。すなわち、*

$$f_n^*g_n\overset{H^s}{\longrightarrow}\hat{g},\quad g_n\overset{H^s}{\longrightarrow}g\quad(g_n\in\mathcal{M}^s,f_n\in\mathcal{D}^{s+1})$$

ならば、(f_n) の部分列 (f_k) が存在して、

$$f_k\overset{H^{s+1}}{\longrightarrow}f\quad\text{in}\quad\mathcal{D}^{s+1}$$

となる。

この定理の証明から、$\hat{g},g\in C^\infty,f\in\mathcal{D}^{s+1}$ ならば、$f\in C^\infty$ であることがわかる。

さて、任意の $g_0\in\mathcal{M}_{-1}\subset\mathcal{M}_{-1}^s$ （任意の　$s>3$) をとり、$\mathcal{O}(g_0)$ を g_0 を通る $\mathcal{D}_0^{s+1}$-軌道（orbit）とする。ここで、$\{f_t\}$ を $f_0=f$ なる $\mathcal{D}_0^{s+1}$ 内の曲線とすると、

$$\frac{d}{dt}\mid_{t=0}f_t^*g_0=f^*\frac{d}{dt}\mid_{t=0}f_t^*g_0=f^*L_Xg_0$$

より、S_2^s の元が再び、S_2^s の元に写されるので、包含写像 $\mathcal{O}(g)\to\mathcal{M}_{-1}^s$ は C^∞- 級、従って、$\mathcal{O}(g)$ は $\mathcal{M}_{-1}^s$ の C^∞-部分多様体であることがわかる。また、

$$T_{g_0}\mathcal{O}(g_0)=\{L_Xg_0\mid X\in\mathcal{X}^s(M)\}$$

である。任意の $h\in T_{g_0}\mathcal{M}_{-1}^s$ に対して、定理 1.6 より、$h=h^0+L_Xg_0\quad(\delta_{g_0}h^0=0)$ と分解される。もっと強いことが言える：

定理 **2.2.** $g_0 \in \mathcal{M}_{-1}$ とするとき、任意の $h \in T_{g_0}\mathcal{M}^s_{-1}$ は、$h = h^0 + L_X g_0$ と分解され、ここで、h^0 は $\delta_{g_0}h^0 = 0, \mathrm{tr}_{g_0}h^0 = 0$ をみたす。

[証明] $L_X g_0 \in T_{g_0}\mathcal{M}^s_{-1}$ より、$DR(g_0)(L_X g_0) = 0$ であるが、一方、$DR(g_0)h = 0$ であるから、$DR(g_0)h^0 = 0$ が成り立つ。(1.5) より、

$$DR(g_0)h^0 = -\Delta_{g_0}(\mathrm{tr}_{g_0}h^0) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{g_0}h^0 = 0$$

であるから、結局、$\mathrm{tr}_{g_0}h^0 = 0$ が得られる。 [証明終]

これらの考察から、

$$S_2^{TT}(g) = \{h \in S_2^s \mid \delta_g h = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{tr}_g h = 0\}$$

とおく。なぜ、H^s を表す文字 s が、定義式の左辺に入っていないかはすぐに判明する。任意の $h \in S_2^{TT}(g)$ を、

$$h = h_{11}dx^2 + 2h_{12}dxdy + h_{22}dy^2$$

と表したとき、$\xi(z) = h_{11} - \sqrt{-1}h_{12}$ とおく。このとき、ξ は、(局所的に定義された) 正則関数である ([Q10] を参照)。また、簡単な計算により、

$$h = \mathrm{Re}\big(\xi(z)dz^2\big) \tag{2.2}$$

であることもわかる。(2.2) を考慮して、$(M, c(g_0))$ 上の正則 2 次微分形式全体の集合を $HQD(M, c(g_0))$ で表すことにすると、$S_2^{TT}(g_0)$ と $HQD(M, c(g_0))$ は同型であることがわかる。このことから、$S_2^{TT}(g_0)$ は C^∞-テンソル場のみからなることがわかる。そこで、$S_2^{TT}(g_0)$ の次元を計算するには、$HQD(M, c(g_0))$ の次元を計算すればよい (これが、$\mathcal{T}(M)$ の次元になることが後でわかる)。

[$HQD(M, c(g_0))$ の次元] $E = \otimes^2 T^*M^{1,0}$ とおく。リーマン=ロッホ (Riemann-Roch) の定理 (cf. Griffiths-Harris, "Principles of Algebraic Geometry", pp243-246) より、

$$\mathrm{dim}H^0(M, E) - \mathrm{dim}H^1(M, E) = 1 - p + \deg(E) \tag{2.3}$$

が成り立つ。ここで、p は M の種数 (genus) を表す。すると、小平=セール (Kodaira-Serre) duality Theorem より、

$$\begin{aligned} H^1(M, E) &\cong H^0(M, E^* \otimes T^*M^{1,0}) \\ &\cong H^0(M, TM^{1,0}) = \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

を得る。最後の等式は、$p > 1$ のとき、M 上の正則ベクトル場はゼロしかないからである (この事実は、Riemann-Roch の定理を用いても示せるし、また、微分幾何的な Bochner technique を用いても示せる)。さらに、

$$\deg(E) = c_1(E) = -2c_1(M) = -2\mathcal{X}(M) = 4p - 4$$

である。従って、(2.3) より、$\mathrm{dim}_{\mathbf{C}}H^0(M, E) = 3p - 3$ となるが、ここで、$H^0(M, E) = HQD(M, c(g_0))$ であるから、結局、

$$\mathrm{dim}_{\mathbf{R}}S_2^{TT}(g_0) = 6p - 6 \tag{2.4}$$

を得る。

定理 **2.3.** 任意の $g_0 \in \mathcal{M}_{-1}$ が与えられたとき、任意の s に対して、$\mathcal{M}^s_{-1}$ の C^∞-部分多様体 $\mathcal{S}$ で、$\dim\mathcal{S} = 6p-6, T_{g_0}\mathcal{S} = S_2^{TT}(g_0) \quad (g_0 \in \mathcal{S})$ をみたすものが存在する。

[証明] 任意の $g_0 \in \mathcal{M}_{-1}$ をとったとき、十分小さい h^{TT} に対して $g_0 + h^{TT}$ は正定値計量になっている。定理 1.5 より、ある λ が一意的に存在し、$R(\lambda(g_0+h^{TT})) \equiv -1$ をみたす。ここで、$\lambda = \lambda(h^{TT})$ は、h^{TT} に滑らかに依存する楕円型偏微分方程式の一意解であるから、一般論より λ は h^{TT} の滑らかな関数であることがわかる。いま、$\lambda(0) = 1$ である。

$$U = \{h^{TT} \in S_2^{TT}(g_0) \mid g_0 + h^{TT} > 0\}$$

とおくとき、写像 $\widetilde{\Phi} : U \longrightarrow \mathcal{M}^s_{-1}$ を、

$$\widetilde{\Phi}(h^{TT}) = \lambda(h^{TT})(g_0 + h^{TT})$$

により定義する。すると、$D\widetilde{\Phi}(0) = Id$ であることを示そう。そうすれば、$\widetilde{\Phi}(U)$ は C^∞- 部分多様体であり、これが求める $\mathcal{S}$ であることは、$S_2^{TT}(g_0)$ が線形空間であることから明らかである。そこで、

$$D\widetilde{\Phi}(0)k^{TT} = (D\lambda(0)(k^{TT}))g_0 + \lambda(0)k^{TT} \tag{2.5}$$

であるが、$\lambda(0) = 1$ であったから、$\rho = D\lambda(0)(k^{TT})$ とおいたとき、$\rho \equiv 0$ を示せばよい。しかるに、いま、$\widetilde{\Phi}(0) = g_0 \in \mathcal{M}_{-1}$ かつ $R(\widetilde{\Phi}(h^{TT})) \equiv -1$ より、$h^{TT} = 0$ の近傍で $R \equiv -1$ なので、

$$DR(g_0)(D\widetilde{\Phi}(0)k^{TT}) = 0$$

が成り立つ。従って、(2.5) より $DR(g_0)(\rho g_0 + k^{TT}) = 0$ であるから、(1.5) より結局、$-\Delta_{g_0}\rho + \rho = 0$ となり、$\rho = 0$ が得られる。 [証明終]

さて、$\mathcal{T}(M)$ が C^∞-多様体であることを示すために、$\mathcal{S}$ を local trivialization に利用する：

定理 **2.4.** $\Theta(g,f) = f^*g$ とすると、Θ は、$\mathcal{S} \times \mathcal{D}_0^{s+1}$ における (g_0, Id) のある近傍 $W \times V$ から $\mathcal{M}^s_{-1}$ における g_0 のある近傍 $\widetilde{W}$ への C^∞-級微分同相写像である。

[証明] 写像 $\Theta : \mathcal{S} \times \mathcal{D}_0^{s+1} \ni (g,f) \longrightarrow f^*g \in \mathcal{M}^s_{-1}$ は C^∞-級である（定理 2.1 の後の説明を参照)。そこで、

$$D\Theta(g_0, Id)(h^{TT}, X) = h^{TT} + L_X g_0 \tag{2.6}$$

であることを示せば、定理 2.2 により $D\Theta(g_0, Id)$ は同型写像であるから、Θ は局所微分同相写像であることが、逆関数定理よりわかる。しかるに、

$$\frac{\partial}{\partial g}\Theta(g_0, Id)h^{TT} = Id^* h^{TT} = h^{TT} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial f}\Theta(g_0, Id)X = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, f_t^* g_0 = L_X g_0 \quad ,$$

ここで、$\{f_t\}$ は、$f_0 = Id, \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, f_t = X$ をみたす、微分同相群の 1 助変数部分群である。このことから、(2.6) が成り立つことがわかる。 [証明終]

定理 2.1 の後で述べたように、$g, f^*g \in C^\infty$ ならば、$f \in C^\infty$ であった。

定理 **2.5.** $\mathcal{S}$ を十分小さくとったとき、$\mathcal{S}$ の各点は唯一つの $\mathcal{D}_0$-軌道 に対応する。すなわち、$g, f^*g \in \mathcal{S}$ ならば $f = Id$ が成り立つ。

[証明] f が Id に十分近ければ、定理 2.4 より主張は正しいことがわかる。次に、f が Id から離れている場合を考える。そこで、$\mathcal{D}_0$ のなかのある列 (f_n) と、$\mathcal{S}$ のなかのある列 (g_n) が存在して、$\mathcal{D}_0$ における Id の適当な H^{s+1}-近傍 V に含まれないすべての f_n に対して、

$$g_n \xrightarrow{H^s} g_0 \quad , \qquad f_n g_n \xrightarrow{H^s} g_0$$

であるとすると、$\mathcal{D}_0$ の proper 性より、ある部分列 (f_k) が存在して、

$$f_k \xrightarrow{H^{s+1}} f \quad (\in \mathcal{D}_0)$$

であるから、$f^*g_0 = g_0$ となる。しかるに、$\mathcal{D}_0$ の free 性より、$f = Id$ となり矛盾である。 [証明終]

定理 **2.6.** $\mathcal{T}(M) = \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ は C^∞-多様体である。

[証明] 局所的には、$\mathcal{T}(M) \cong \mathcal{S}$ であるから、$\mathcal{S}$ を座標系として用いる。このとき，座標変換が C^∞-級であることを言えばよい。そこで、$\theta^{-1} : \mathcal{S} \ni g \longrightarrow f^*g \in \mathcal{M}_{-1} \quad (f \in \mathcal{D}_0)$ を局所座標系とし、同様に、$\widetilde{\theta}^{-1}$ を別の局所座標系として、$\widetilde{\theta} \circ \theta^{-1}$ が定義されているところで C^∞-級であることを示す。定理 2.5 より、

$$\big(\widetilde{\theta} \circ \theta^{-1}\big)(g) = \widetilde{\theta}(g) = \widetilde{g}$$

となる。ここで、$\widetilde{g}$ は、$\widetilde{\Theta}(f, \widetilde{g}) = g$ により定義されるが、方程式

$$\widetilde{\Theta}(f, \widetilde{g}) = \widetilde{G} \quad , \qquad (f, \widetilde{g}) \in \mathcal{D}_0 \times \widetilde{S}$$

は、$\widetilde{G}$ に滑らかに依存する C^∞-座標の一意解 $f(\widetilde{G}), \widetilde{g}(\widetilde{G})$ をもつので、結局、$\widetilde{\theta} \circ \theta^{-1}$ は C^∞-級であることが示された。 [証明終]

§**3.** $\mathcal{T}(M)$ は胞体（**cell**）である

(M, G) をコンパクト・リーマン面で、スカラー曲率 $R(G)$ が $R(G)$ □ 0 であるものとすると、Eells-Sampson の定理から写像 $(M, g) \longrightarrow (M, G)$ の各ホモトピー類のなかに調和写像（harmonic map）が存在する。しかも、さらに M 上いたるところ $R(G) < 0$ であれば、その調和写像は一意的である（[Q12] を参照）。ここで、次の結果が知られている（[Q11], [Q13] を参照）:

定理 **(R. Schoen-S.T. Yau, J.H. Sampson).** $S : (M, g) \longrightarrow (M, G) \quad (R(G) \;\square\; 0)$ を Id にホモトピックな調和写像とすると、S は向きを保つ（*orientation preserving*）C^∞-級微分同相写像である。さらに、対応 $g \to S(g)$ は C^∞-級である。

いま、

$$E(g, S(g)) = \frac{1}{2} \int_M \sum_{i,j} g^{ij} G(\nabla_i S, \nabla_j S) d\mu_g$$

を S の Dirichlet energy とし、

$$\hat{E}(g) = E(g, S(g))$$

とおく。ここで、$S(g)$ は上に述べた定理より得られる、Id にホモトピックな一意的調和写像である。すると、$\hat{E}$ は $\mathcal{M}$ （あるいは $\mathcal{M}_{-1}$）上の C^∞-汎関数である。さらに、これが $\mathcal{T}(M)$ 上の C^∞-汎関数を引き起こすことを以下みていこう。まず、

$$(3.1) \qquad E(f^* g, f^* S(g)) = E(g, S(g)) \qquad (\text{任意の} \quad f \in \mathcal{D})$$

を得る。なぜならば、写像 $f : (M, c(f^* g)) \longrightarrow (M, c(g))$ は、$c(f^* g) = f^* c(g)$ より、正則写像であるから、

$$\begin{aligned} E(f^* g, f^* S(g)) &= 2 \int_M (f^* g)^{z\bar{z}} (f^* S)_z (f^* S)_{\bar{z}} d\mu_g \\ &= 2 \int_M g^{z\bar{z}} S_z S_{\bar{z}} d\mu_g = E(g, S(g)) \end{aligned}$$

となるからである。次に、

$$(3.2) \qquad S(f^* g) = f^* S(g) \qquad (\text{任意の} \quad f \in \mathcal{D}_0)$$

が成り立つ。なぜならば、$f^* S(g) = S(g) \circ f$ は、正則写像 $f : (M, c(f^* g)) \longrightarrow (M, c(g))$ と調和写像 $S(g) : (M, c(g)) \longrightarrow (M, G)$ との合成写像であるが、f は Id にホモトピックであるから、$f^* S(g)$ も Id にホモトピックである。一方、$S(f^* g) : (M, c(f^* g)) \longrightarrow (M, G)$ も、Id にホモトピックな調和写像を表すから、一意性（[Q12] を参照）より、$f^* S(g) = S(f^* g)$ でなければならない。

さて、$g_0 = G \in \mathcal{M}_{-1}$ とおき、固定する。すなわち、$S(g) : (M, g) \longrightarrow (M, g_0)$ は、任意の $g \in \mathcal{M}$ に対して、Id にホモトピックな一意的調和写像とする。(3.1) および (3.2) により、

$$\hat{E}(g) = \hat{E}(f^* g) \qquad (\text{任意の} \quad f \in \mathcal{D}_0)$$

が得られるから、$\widetilde{E} = \hat{E} \mid_{\mathcal{T}(M)}$ とおけば、

$$\widetilde{E} : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathbf{R}$$

は C^∞-汎関数である。そこで、我々の目的は次の [Claim] を示すことにある：
[Claim] $\widetilde{E}$ は proper 関数であり、しかも、非退化（non-degenerate）である唯一の臨界点（critical point）をもつ。

この [Claim] が示せると、微分トポロジーでよく知られているように（[Q18] を参照）、$\mathcal{T}(M)$ は $\mathbf{R}^{6p-6}$ に C^∞-微分同相であることがわかる。ここで、p は、M の種数を表す。$\widetilde{E}$ の proper 性の証明は、やや厄介であるが、臨界点についての性質は、直接、計算で示せる：

定理 3.1. *任意の $h \in T_{[g]}\mathcal{T}(M)$ に対して、$\widetilde{h}$ を h の $g \in \mathcal{M}_{-1}$ への水平持ち上げ（horizontal lift）とする。$\xi(z) = 4g_0 < \frac{\partial S}{\partial z}, \frac{\partial S}{\partial z} >$ とおくとき、*
(1) $D\widetilde{E}[g]h = -\frac{1}{2} << \mathrm{Re}\big(\xi(z)dz^2\big), \widetilde{h} >>_{L^2}$,
(2) $[g_0]$ *は* $\widetilde{E}$ *の唯一の臨界点である、*
(3) $D^2\widetilde{E}[g_0](h,k) =<< h, k >>_{L^2}$.

[証明] (1) $D\widetilde{E}[g]h = D\widetilde{E}(g)\widetilde{h}$ である。ここで、$\xi(z)$ は正則関数であることに注意。実際、S が調和写像であることから、$\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\frac{\partial S}{\partial z} = 0$ が成り立つ。従って、

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\xi(z) = 8g_0(\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\frac{\partial S}{\partial z}, \frac{\partial S}{\partial z}) = 0$$

となるからである。さて、$W(\widetilde{h}) = DS(g)\widetilde{h}$ とおき、

$$\widetilde{E}(g) = \frac{1}{2}\int_M g^{ij}\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial S^\beta}{\partial x^j}(g_0)_{\alpha\beta}d\mu_g$$

の変分を求める：$\widetilde{h}$ は horizontal より $\mathrm{tr}_g\widetilde{h} = 0$ であり、また、S は $E(g, S(g))$ の臨界点であるから、

$$\begin{aligned} D\widetilde{E}(g)\widetilde{h} &= -\frac{1}{2}\int_M\sum_{i,j}\widetilde{h}^{ij}g_0(\frac{\partial S}{\partial x^i}, \frac{\partial S}{\partial x^j})d\mu_g + \frac{1}{4}\int_M\sum_{i,j}g^{ij}g_0(\frac{\partial S}{\partial x^i}, \frac{\partial S}{\partial x^j})\big(\mathrm{tr}_g\widetilde{h}\big)d\mu_g \\ &\quad + \int_M\sum_{i,j}g^{ij}g_0(\frac{\partial W}{\partial x^i}, \frac{\partial S}{\partial x^j})d\mu_g \\ &= -\frac{1}{2}\int_M\sum_{i,j}\widetilde{h}^{ij}g_0(\frac{\partial S}{\partial x^i}, \frac{\partial S}{\partial x^j})d\mu_g \qquad (3.3) \end{aligned}$$

となる。ここで、最初の等式の右辺の第三項は、$\frac{1}{2}DE(g, S(g))W(\widetilde{h}) = 0$ となることに注意。いま、$\mathrm{Re}\big(\xi(z)dz^2\big) = \rho_{11}dx^1dx^1 + 2\rho_{12}dx^1dx^2 + \rho_{22}dx^2dx^2$ とおくと、$\widetilde{h}^{11} = -\widetilde{h}^{22}, \widetilde{h}^{12} = \widetilde{h}^{21}$ より、

$$\sum_{i,j}\widetilde{h}^{ij}g_0(\frac{\partial S}{\partial x^i}, \frac{\partial S}{\partial x^j}) = \widetilde{h}^{11}\rho_{11} + \widetilde{h}^{12}\rho_{12}$$

であることが確かめられる。一方、

$$\begin{aligned} << \mathrm{Re}\big(\xi(z)dz^2\big), \widetilde{h} >>_{L^2} &= \frac{1}{2}\int_M\big(\rho_{11}\widetilde{h}^{11} + 2\rho_{12}\widetilde{h}^{12} + \rho_{22}\widetilde{h}^{22}\big)d\mu_g \\ &= \int_M\big(\rho_{11}\widetilde{h}^{11} + \rho_{12}\widetilde{h}^{12}\big)d\mu_g \end{aligned}$$

となるから、これと (3.3) より主張は確かめられた。
(2) $[g]$ が臨界点ということは、(1) より、$\mathrm{Re}(\xi(z)dz^2) \equiv 0$ を意味するが、$\xi(z)$ が正則関数であることから、$\xi(z)dz^2 \equiv 0$ が成り立つことがわかる。このとき、

$$g_0(\frac{\partial S}{\partial z}, \frac{\partial S}{\partial z}) = g_0(\frac{\partial S^{1,0}}{\partial z}, \frac{\partial S^{0,1}}{\partial z}) \equiv 0$$

であるから、従って、S は M の各点で正則または反正則写像である。ところが、S は向きを保つ微分同相写像であったから、結局、S は正則写像である。$S : (M, g) \longrightarrow (M, g_0)$ が正則写像ということから、$c(S^* g_0) = S^* c(g_0) = c(g)$ であるから、同型対応 $\mathcal{C} \cong \mathcal{M}/\mathcal{P}$ より、$[g] = [S^* g_0] = [g_0]$ が得られる。
(3) h は horizontal とは限らないものに対して、計算を行わなくてはならないので、もう一度、第一変分を計算しなおさなくてはならない。$\hat{E}(g) = E(g, S(g)) \quad (g \in \mathcal{M})$ とおく。$h^T = h - \frac{1}{2}\big(\mathrm{tr}_g h\big)g$ とおくとき、

$$D\hat{E}(g)h = -\frac{1}{4} << \mathrm{Re}\big(\xi(z)dz^2\big), h^T >>_{L^2} \tag{3.4}$$

となる（[Q14] を参照)。次に、第二変分公式を計算するために、$\sigma(t)$ を $\sigma(0) = [g_0], \sigma'(0) = h$ をみたす、$\mathcal{T}(M)$ 内の任意の C^2-曲線とし、$\widetilde{\sigma}(t)$ を $\widetilde{\sigma}(0) = g_0, \widetilde{\sigma}'(0) = \widetilde{h}$ をみたす、$\sigma(t)$ の水平持ち上げとする。このとき、$\widetilde{E}(\sigma(t)) = \hat{E}(\widetilde{\sigma}(t))$ である。ここで、

$$(\frac{d}{dt})^2 \hat{E}(\widetilde{\sigma}(t)) = D^2\hat{E}(\widetilde{\sigma}(t))(\widetilde{\sigma}'(t), \widetilde{\sigma}'(t)) + D\hat{E}(\widetilde{\sigma}(t))\widetilde{\sigma}''(t)$$

となるが、右辺の第二項は、(3.4) と (2) より、$t \to 0$ のとき 0 となる。従って、(3.4) より、$t \to 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
D^2\widetilde{E}[g](h, h) &= \frac{d^2}{dt^2}\,|_{t=0}\ \widetilde{E}(\sigma(t)) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\,|_{t=0}\ \hat{E}(\widetilde{\sigma}(t)) \\
&= D^2\hat{E}(g_0)(\widetilde{h}, \widetilde{h}) \\
&= \frac{1}{4}\int_M (\widetilde{h}, \widetilde{h}) \sum_{i,j} g_0^{ij} g_0(\frac{\partial S}{\partial x^i}, \frac{\partial S}{\partial x^j}) d\mu_{g_0} =<< \widetilde{h}, \widetilde{h} >>_{L^2}
\end{aligned}$$

となる。ここで、四番目の等式では $W(h) = DS(g_0)h = 0$ （[Q15] を参照）を用いている。また、五番目の等式では $g = g_0$ のとき $S = Id$ になることを用いている。あとは、対称２次形式の Polarization より、求める結果を得る。 [証明終]
[$\widetilde{E}$ の proper 性] まずはじめに、

$$\widetilde{E}[g_n] = E(g_n, S(g_n)) \square K$$

であると仮定する。このとき、$([g_n])$ が収束する部分列（subsequence）をもつことを示す。簡単のため、$S_n = S(g_n)$ とおく。いま、γ を (M, g_n) の非自明ループ（non-trivial loop）とすると、S_n が Id にホモトープであることから、$S_n(\gamma)$ も非自明ループである。
[Claim] l を γ の長さとすると、

$$l \geq \frac{\delta^2(\pi - 2\theta_0)}{\sqrt{2}K}$$

が成り立つ。ここに、δ は $S_n(\gamma) \quad (\in (M, g_0))$ の長さの下限であり、θ_0 は、

$$\cot^4 \frac{\theta_0}{2} \geq \frac{1 + \cosh(l/\sqrt{2})}{\sinh(l/\sqrt{2})}$$

をみたす（これは、カラー（Collar）補題による（[Q16] を参照））。

実際、γ の M における近傍 U が存在して、

$$T = \{(\gamma, \theta) \mid 1 \square r \square e^{l/\sqrt{2}}, \quad \theta_0 \square \theta \square \pi - \theta_0\}$$

により定義される集合 T を考えると、U は $T/\sim$ に等長的（isometric）である。ここで、$\sim$ は、$(1, \theta)$ と $(e^{l/\sqrt{2}}, \theta)$ を同一視する同値関係を表す。θ_0 が十分 $\pi/2$ に近ければ、そのような等長写像があることは明らかであり、問題は θ_0 の下限の評価にある。それを示しているのが Collar 補題ということになる。さて、そのことの証明は、[Q16] で示されているので、それは認めて、[Claim] の l についての不等式を示そう：

$$\begin{aligned}
\delta^2 &\square \Big(\int_1^{e^{l/\sqrt{2}}} \| \sqrt{r}\frac{\partial S_n}{\partial r}(r, \theta) \| \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} dr\Big)^2 \\
&\square \Big(\int_1^{e^{l/\sqrt{2}}} \frac{dr}{r}\Big)\Big(\int_1^{e^{l/\sqrt{2}}} r \| \frac{\partial S_n}{\partial r}(r, \theta) \|^2 \, dr\Big)
\end{aligned}$$

であるから、この不等式を Collar 上で（θ に関して）積分すると、

$$\begin{aligned}
\delta^2(\pi - 2\theta_0) &\square \frac{l}{\sqrt{2}} \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} \int_1^{e^{l/\sqrt{2}}} \Big(\| \frac{\partial S_n}{\partial r} \|^2 + \frac{1}{r^2} \| \frac{\partial S_n}{\partial \theta} \|^2 \Big) r dr d\theta \\
&\square \frac{l}{\sqrt{2}} \cdot 2E(g_n, S_n) \square \sqrt{2} l K
\end{aligned}$$

となり、これより、l の求める不等式を得る。

補題 3.1[Mumford's compactness Theorem]. $\big((M, g_n)\big) \quad (g_n \in \mathcal{M}_{-1})$ をリーマン面の列とし、さらに、(M, g_n) 上の非自明な閉測地線はすべて、一様に長さが下に有界とする。このとき、(g_n) のある部分列 (g_k) とある $f_k \in \mathcal{D}$ および、ある $g \in \mathcal{M}_{-1}$ が存在して、

$$f_k^* g_k \xrightarrow{C^\infty} g$$

となる。

補題 3.1 により、ある部分列 $f_k \in \mathcal{D}$ で、$f_k^* g_k =: \hat{g}_k \longrightarrow {}^\exists g \in \mathcal{M}_{-1}$ となるものが存在するわけである。このとき、f_k が、必ずしも $\mathcal{D}_0$ からとれるとは限らない。この点をクリアするために以下の議論が必要になる。

補題 **3.2.** いま、$g \in \mathcal{M}_{-1}$ を固定し、$v_n : M \longrightarrow M$ を微分同相写像の列で、$E(g, v_n) \square K$ をみたすものとする。このとき、列 (v_n) は同等連続（*equicontinuous*）である。

[証明] $B_\delta(z_0) = \{z \mid r(z) \square \delta\}$ とおき、$\delta < 1$ とする。ここで、$B_{\sqrt{\delta}}(z_0)(\subset M)$ がすべて座標近傍に含まれるように十分小さく $\delta(< 1)$ を選んでおく。Courant-Lebesgue 補題（[Q17] を参照）より、

$$\int_0^{2\pi} \| \frac{\partial v_n(\rho, \theta)}{\partial \theta} \| \, d\theta \square \left(\frac{8\pi K}{\log \frac{1}{\delta}}\right)^{1/2}, \qquad \delta \square {}^{\exists}\rho \square \sqrt{\delta}$$

が成り立つ。いま、$x, y \in B_\delta(z_0)$ とし、上の不等式が成り立つ $\rho \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ を選ぶと、

$$v_n(x), v_n(y) \in v_n(B_\rho(z_0)) \cong \text{ 半径が } o(\delta) \text{ 以下のある円盤}$$

であるから、結局、$d(v_n(x), v_n(y)) \square o(\delta)$ が成り立ち、$o(\delta)$ は v_n, z_0 に無関係であるから、求める結論を得る。 [証明終]

最後に、次の [Claim] を示そう：

[Claim] 列 (f_k) は、$\mathcal{D}/\mathcal{D}_0$ の有限個の同値類に属する。

実際、そうでないとすると、部分列 (f_m) を選んで、各 f_m は相異なるホモトピー類に属するものからなるようにとれる。$v_m = S_m \circ f_m$ とおくと、(v_m) は、相異なるホモトピー類に属すが、補題 3.2 により、同等連続である。ところが、アスコリ＝アルゼラ（Ascoli-Arzelá）の定理より、同等連続な列は収束する部分列をもつので、これは矛盾である。

この [Claim] より、さらに、部分列 (f_m) を選んで、すべて同じ同値類に属するものだけからなるようにとれる。このとき、ある $f \in \mathcal{D}$ に対して、$\mathcal{D}_0 f_m = \mathcal{D}_0 f$ であるから、結局、ある $h_m \in \mathcal{D}_0$ が存在して、$f_m = h_m \circ f$ と表せる。以上より、

$$h_m^* g_m = \left(f^{-1}\right)^* f_m^* g_m \longrightarrow \left(f^{-1}\right)^* g$$

である。すなわち、$[g_m] \to [(f^{-1})^* g]$ であることが示された。従って、$\widetilde{E} : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathbf{R}$ は proper である。

以上の考察と、次の微分トポロジーでよく知られた結果を合わせると、C^∞-級微分同相 $\mathcal{T}(M) = \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0 \cong \mathbf{R}^{6p-6}$ が証明される（p は M の種数である）：

定理 **([Q18]** を参照**).** $\widetilde{E} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ を、$m(< \infty)$- 次元多様体 $\mathcal{T}$ 上の C^∞-実数値汎関数であり、以下の三つの条件 *(1)*∼*(3)* をみたすとする；

(1) $\widetilde{E}$ は唯一の臨界点 $p_0 \in \mathcal{T}$ をもつ。

(2) $\widetilde{E}$ は *proper* 関数である（すなわち、$\widetilde{E}^{-1}[a, b]$ は $\mathcal{T}$ のコンパクト集合である）。

(3) 臨界点 p_0 は、非退化である（すなわち、$D^2 \widetilde{E}_{p_0} : T_{p_0}\mathcal{T} \times T_{p_0}\mathcal{T} \longrightarrow \mathbf{R}$ が非退化二次形式）。

このとき、$\mathcal{T}$ は $\mathbf{R}^m$ に C^∞- 微分同相である。

§**4.** タイヒミュウラー空間の複素構造

前節までは、$\mathcal{T}(M)=\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ という実現を用いたわけであるが、ここからは $\mathcal{T}(M)=\mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ という実現を用いる。実際、C^∞-級微分同型写像 $\widetilde{\Psi}:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{M}_{-1}$（[Q19] を参照）を用いて、$\mathcal{M}_{-1}$ のスライス $\mathcal{S}$ の代わりに、$\widetilde{\Psi}^{-1}(\mathcal{S})$ を考えることにより、$\mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ と $\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ を同等に扱うことができる。

[L^2-計量] $\mathcal{A}$ 上の L^2-計量 $<<\cdot,\cdot>>_{L^2}$ を、

$$<<H,K>>_{L^2}=\int_M \mathrm{tr}(HK)d\mu_{g(J)},\qquad \text{for}\quad H,K\in T_J\mathcal{A}$$

により定める。ここで、$g(J)$ は、$\widetilde{\Psi}(J)$ によって与えられるリーマン計量 $g\in\mathcal{M}_{-1}$ を表す。この L^2-計量に関して、$\widetilde{\Psi}$ は等長的になっていないが、水平ベクトル場に制限すれば等長的になっている（下の $T_J\mathcal{A}$ の L^2-直交分解を参照)。従って、どちらも同じ L^2-計量を $\mathcal{T}(M)$ 上に誘導する。

各 $J\in\mathcal{A}$ に対して、$\Phi_J:T_J\mathcal{A}\longrightarrow T_J\mathcal{A}$ を

$$\Phi_J(H)=JH$$

により定義する。さらに、$\mathcal{A}$ 上の接ベクトル場 H にたいして、$\Phi(H)_J=\Phi_J(H_J)$ と定めることにより、Φ を $\mathcal{A}$ 上の $(1,1)$-型テンソル場に拡張しておく。$\Phi_J(H)\in T_J\mathcal{A},\Phi^2=-Id$ であることは容易にわかる。従って、Φ は $\mathcal{A}$ に概複素構造（almost complex structure）を定める。$\mathcal{A}$ の点 J における接空間 $T_J\mathcal{A}$ は、$T_J\mathcal{A}=\{H\mid HJ+JH=0\}$ で与えられたが、より具体的には、

$$T_J\mathcal{A}=\{H\mid H=L_XJ+H^{TT}\quad (L^2-\text{直交分解}),\quad \mathrm{tr}_{g(J)}H^{TT}=0,\delta_{g(J)}H^{TT}=0\}$$

で与えられる。これは、$T_g\mathcal{M}_{-1}=\{h\mid h=L_Xg+h^{TT},\quad \mathrm{tr}_gh=0,\delta_gh=0\}$ の証明と同様にして確かめられる。ただし、任意の $H\in T_J\mathcal{A}$ は $\mathrm{tr}_{g(J)}H=0$ をみたすので、H^{TT} の本質的な条件は、$\delta_{g(J)}H^{TT}=0$ だけである。以下、$\mathcal{T}(M)=\mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ に複素構造が入ることを示そう：

Step 1. Φ は $T_J\mathcal{A}$ の L^2**-直交分解を保つ。**

[証明] $N(J)(X,Y)=2\{[JX,JY]-[X,Y]-J[JX,Y]-J[X,JY]\}$ を Nijenhuis テンソルとする（$J\in\mathcal{A}$)。M は２次元であるから、$N(J)=0$ であり、

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2}N(J)(X,Y)\\&=L_{JX}(JY)-L_XY-JL_{JX}Y-JL_X(JY)\\&=(L_{JX}J)(Y)-J(L_XJ)(Y)\end{aligned}$$

が任意の $Y\in\mathcal{X}^\infty(M)$ に対して成り立つ。従って、

$$L_{JX}J=JL_XJ\qquad(\text{任意の}\quad X\in\mathcal{X}^\infty(M))\tag{4.1}$$

が成り立つ。Vertical ベクトルは $L_X J$ の形であったから、(4.1) より、

$$\Phi(L_X J) = JL_X J = L_{JX} J$$

となり、これは vertical ベクトルである。あとは、$\delta_{g(J)}(\Phi(H^{TT})) = 0$ であることを示せば主張は確かめられる。そこで、共形座標形を用いて計算する。$l = 1, 2$ に対して、

$$\begin{aligned}
\delta_{g(J)}(\Phi(H^{TT}))_l &= \delta_{g(J)}(JH^{TT})_l \\
&= -\sum_{i,j} \nabla_i^{g(J)}(J_j^i h_l^j) \\
&= -\sum_{i,j} J_j^i \nabla_i^{g(J)} h_l^j = \nabla_1 h_l^2 - \nabla_2 h_l^1
\end{aligned}$$

であるが、$\nabla_1 h_l^1 + \nabla_2 h_l^2 = 0, h_1^1 + h_2^2 = 0, h_1^2 = h_2^1$ であるから、結局、$\delta_{g(J)}(\Phi(H^{TT})) = 0$ であることがわかる。 [証明終]

Step 2. Φ は $\mathcal{D}$**-**不変（**invariant**）である。

[証明] $\mathcal{O}_f(J) = f^*J \quad (f \in \mathcal{D})$ とおいたとき、$\mathcal{O}_f$ が線形であることから、$D\mathcal{O}_f(J)H = f^*H$ となる。そこで、

$$D\mathcal{O}_f(J)^{-1}\Phi_{\mathcal{O}_f(J)} D\mathcal{O}_f(J) \cdot H = \Phi_J(H) \tag{4.2}$$

を示せばよい。しかし、

$$f^*Jf^*H = df^{-1} \cdot J \cdot df \cdot df^{-1} \cdot H \cdot df = f^*(JH)$$

より、$(f^*)^{-1}(f^*Jf^*H) = JH$ であり、これは (4.2) と同値である。 [証明終]

Step 3. $N(\Phi) \equiv 0$ が成り立つ。

[証明] Z, W を $\mathcal{A}$ 上のベクトル場とする。$\mathcal{A}$ をベクトル空間 $E = C^\infty(T_1^1 M)$ に埋め込んでおき、$\mathcal{A}$ 上のベクトル場 Z, W を、写像 $\mathcal{A} \longrightarrow T\mathcal{A}$ としてではなく、写像 $\widetilde{Z}, \widetilde{W} : \mathcal{A} \longrightarrow E$ とみなす。そこで、ベクトル空間の方向微分を用いて、W の Z 方向への微分 $DW(Z)$ を、$DW(Z)(J) = D\widetilde{W}(J)\widetilde{Z}(J)$ により定める。ベクトル場 J とは、恒等写像 $I : \mathcal{A} \ni J \longrightarrow J \in E$ のことであるから、$DJ(Z) = Z$ である。実際、$DJ(Z)(J)$ は、$DI(J)Z(J) = Z(J)$ となるからである。さらに、交換子積を、$[Z, W] = DW(Z) - DZ(W)$ により定める。$[Z, W](J) \in T_J\mathcal{A}$ であることを示さなくてはならない。以下では、ベクトル場 Z と写像 $\widetilde{Z}$ を同一視して計算を行う。いま、$\Pi(J) : E \longrightarrow T_J\mathcal{A}$ を射影とする。$\Pi(J)X(J) \equiv X(J)$ という恒等式を、J を動かして、$Y(J)$ 方向に微分すると、

$$(D\Pi(J)Y(J))X(J) + (\Pi(J) - id)DX(J)Y(J) \equiv 0$$

となる。同様に、$\Pi(J)Y(J) \equiv Y(J)$ を、$X(J)$ 方向に微分すると、

$$(D\Pi(J)X(J))Y(J) + (\Pi(J) - id)DY(J)X(J) \equiv 0$$

を得る。ここで、次の [Claim] を仮定する：
[Claim] $(D\Pi(J)Y(J))X(J)=(D\Pi(J)X(J))Y(J)$

このとき、上の二つの式の差をとると、$(\Pi(J)-id)[X,Y](J)\equiv 0$ を得る。従って、$[X,Y](J)\in T_J\mathcal{A}$ である。さて、[Claim] を示そう：
$X(J),Y(J)\in T_J\mathcal{A}$ は、トレースが 0 で、$g(J)$ に関して対称である $(1,1)$-型テンソルである、という特徴付けができる（[Q2] の証明を参照）。一方、$DY(X)(J)$ は、トレースが 0 の $(1,1)$-型テンソルであるが、もはや、$g(J)$ に関して対称であるとは限らない。そこで、

$$\Pi(J):Z\longrightarrow\frac{1}{2}(Z+Z^*),\qquad \text{for}\quad Z\in E\quad\text{with}\quad \mathrm{tr}_{g(J)}Z=0$$

と定義する。ここで、Z^* は、$g(J)$ に関する Z の随伴（adjoint）テンソルである。座標を一つ選び、それに関して、テンソルを行列表示し、特に、計量 $g(J)$ の行列表示を G で表す。すると、

$$\begin{aligned}\Pi(J)Z&=\frac{1}{2}(Z+G^{-1t}ZG),\\(D\Pi(J)Y)Z&=\frac{1}{2}(-G^{-1}(DG(J)Y)G^{-1t}ZG+G^{-1t}Z(DG(J)Y))\end{aligned}$$

であるが、[Q19] の証明より、$DG(J)Y=D\widetilde{\Psi}(J)Y=\rho G(J)+h,h=(YJ)_\flat$ であるから、上の式に代入すると、ρ の付いた項はキャンセルしてなくなり、また、共形座標系で $G=pI$ とすれば、${}^tZ=Z^*,h=(YJ)_\flat=pYJ$ となるから、結局、$Z\in T_J\mathcal{A}$ に対して、$(D\Pi(J)Y)Z=\frac{1}{2}J(YZ+ZY)$ となり、[Claim] は確かめられた。そこで、$N(\Phi)$ を計算する：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}N(\Phi)(Z,W)=&[\Phi Z,\Phi W]-[Z,W]-\Phi[\Phi Z,W]-\Phi[Z,\Phi W]\\=&D(JW)(JZ)-D(JZ)(JW)-DW(Z)+DZ(W)\\&-J\big(DW(JZ)-D(JZ)(W)\big)-J\big(D(JW)(Z)-DZ(JW)\big)\\=&(JZ)W+JDW(JZ)-(JW)Z-JDZ(JW)-DW(Z)+DZ(W)\\&-JDW(JZ)+JWZ+J^2DZ(W)-JZW-J^2DW(Z)+JDZ(JW)\\=&0\end{aligned}$$

となる。 [証明終]

Step 4. $\mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ には、概複素構造 $\hat\Phi$ が定義される。

[証明] $\pi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ を射影とし、任意の $X_q\in T_q(\mathcal{A}/\mathcal{D}_0),p\in\pi^{-1}(q)$ に対して、

$$\big(\hat\Phi X\big)_q=D\pi_p\Phi_p\widetilde{X}_p\quad,\qquad(D\pi_p\widetilde{X}_p=X_q)\tag{4.3}$$

により、$\hat\Phi$ を定義すると、

$$\big(\hat\Phi^2X\big)_q=D\pi_p\Phi_p\widetilde{\big(\hat\Phi X\big)}_p\tag{4.4}$$

であるが（ここで、$\widetilde{W}$ などは W の $T\mathcal{A}$ への持ち上げを意味する）、Step 1 により、

$$\begin{aligned}\big(\Phi_p(D\pi_p\widetilde{\Phi_p\widetilde{X}_p})\big)^H &= \Phi_p\big(\Phi_p\widetilde{X}_p\big)^H\\ &= \big(\Phi_p^2\widetilde{X}_p\big)^H = \big(-\widetilde{X}_p\big)^H\end{aligned}$$

となるから（W^H などは $W\in T_p\mathcal{A}$ の水平方向の成分を意味する）、これと (4.4) により、

$$\big(\hat{\Phi}^2X\big)_q = D\pi_p\big(-\widetilde{X}_p\big)^H = -X_q$$

となり、$\hat{\Phi}^2 = -Id$ が得られる。あとは、(4.3) の定義が、$\widetilde{X}$ の取りかたに依らないことを示せばよい。そこで、$D\pi_p\widetilde{X}'_p = X_q$ とすると、$\widetilde{X}'_p - \widetilde{X}_p$ は vertical ベクトルであるから、Step 1 より、$\Phi_p(\widetilde{X}'_p - \widetilde{X}_p)$ も vertical ベクトルであり、従って、

$$D\pi_p\Phi_p\widetilde{X}'_p = D\pi_p\Phi_p\widetilde{X}_p$$

である。次に、$p' = f^*p$ とし、$\widetilde{X}$ を水平ベクトル場に選べば、Step 1, 2 より、

$$\begin{aligned}D\pi_{p'}\Phi_{p'}\widetilde{X}_{p'} &= D\pi_{f^*p}\Phi_{f^*p}\widetilde{X}_{f^*p}\\ &= D\pi_{f^*p}D\mathcal{O}_f\Phi_pD\mathcal{O}_f^{-1}\widetilde{X}_{f^*p}\\ &= D\pi_{f^*p}D\mathcal{O}_f\Phi_p\widetilde{X}_p = D\pi_p\Phi_p\widetilde{X}_p\end{aligned}$$

となる。 [証明終]

Step 5. $N(\Phi)\equiv 0$ ならば、$N(\hat{\Phi})\equiv 0$ が成り立つ。

[証明] $\mathcal{A}$ 上の $\mathcal{D}_0$-不変ベクトル場 Z に対して、$\mathcal{T}(M) = \mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ 上のベクトル場 π_*Z を

$$\big(\pi_*Z\big)_{\pi(p)} = D\pi_pZ_p \quad \in T_{\pi(p)}\big(\mathcal{A}/\mathcal{D}_0\big)$$

により定義する。さて、Z_1, Z_2 を $\mathcal{A}$ 上の $\mathcal{D}_0$-不変ベクトル場とするとき、

$$\begin{aligned}\pi_*N(\Phi)(Z_1,Z_2) &= 2\{[D\pi(\Phi Z_1), D\pi(\Phi Z_2)] - [D\pi(Z_1), D\pi(Z_2)]\\ &\quad -\hat{\Phi}[D\pi(\Phi Z_1), D\pi(Z_2)] - \hat{\Phi}[D\pi(Z_1), D\pi(\Phi Z_2)]\}\\ &= 2\{[\hat{\Phi}\pi_*Z_1, \hat{\Phi}\pi_*Z_2] - [\pi_*Z_1, \pi_*Z_2]\\ &\quad -\hat{\Phi}[\hat{\Phi}\pi_*Z_1, \pi_*Z_2] - \hat{\Phi}[\pi_*Z_1, \hat{\Phi}\pi_*Z_2]\}\\ &= N(\hat{\Phi})(\pi_*Z_1, \pi_*Z_2)\end{aligned}$$

が得られる。従って、この等式から主張は明らかである。 [証明終]

以上、Step 1 ∼ Step 5 と Newländer-Nirenberg の定理により、$\mathcal{T}(M) = \mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ は複素多様体（complex manifold）になることがわかる。$\mathcal{A}$ 自体は無限次元であるので、Newländer-Nirenberg の定理は適用できないが、$\mathcal{A}$ も複素多様体であることは、Abresch-Fischer 正則座標系と呼ばれる大域座標が存在することからわかる。もちろん、$\mathcal{T}(M)$ にも、その正則座標系を導入できるが、こちらは、もはや大域座標ではないことが、 C. Earle の定理（"On holomorphic cross sections in Teichmüller spaces", Duke Math. J. **36**(1969), pp409-415）よりわかる。従って、$\mathcal{T}(M)$ に導入された複素構造は、$\mathbf{C}^{3p-3}$ のそれとは異なるものであり、$\mathbf{C}^{3p-3}$ と正則同型には成り得ない。

§5. L_2-計量（Weil-Petersson 計量）の性質

Wiel-Petersson 計量 $<\cdot,\cdot>_{WP}$ は、$\xi dz^2, \gamma dz^2$ を $(M, g(J))$ 上の正則二次微分形式とし、$g_{ij} = \lambda\delta_{ij}$ としたとき、

$$< \xi, \gamma >_{WP} = \mathrm{Re}\int_M \frac{\xi dz^2 \cdot \overline{\gamma dz^2}}{(\lambda \mid dz \mid^2)^2}\lambda dxdy = \mathrm{Re}\int_M \frac{\xi\overline{\gamma}}{\lambda}dxdy$$

により定義される。しかし、$\mathcal{T}(M)$ の接空間は、正則二次微分形式全体のなす空間と線形同型であることから、対応 $\mathrm{Re}(\xi dz^2) = h^{TT}, \mathrm{Re}(\gamma dz^2) = k^{TT}$ を用いて、簡単な計算により、

$$< \xi, \gamma >_{WP} = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(H^{TT}K^{TT})d\mu_{g(J)} = \frac{1}{2} << H^{TT}, K^{TT} >>_{L^2}$$

であることが確かめられる。ここで、$H^{TT} = g(J)^{-1}h^{TT}, K^{TT} = g(J)^{-1}k^{TT}$ である。従って、Weil-Petersson 計量の正則断面曲率、断面曲率およびリッチ曲率の符号を調べることは、L^2-計量のそれらを調べることと同じである。

$\mathcal{A}$ 上に代数的対称接続 ∇ を次で定義する：

$$\nabla_Y X = DX(Y) - \frac{1}{2}J(XY + YX), \qquad X, Y \in \mathcal{X}^\infty(\mathcal{A}).$$

このとき、$X, Y \in T_J\mathcal{A}$ ならば、 $\nabla_Y X \in T_J\mathcal{A}$ である。実際、$JX = -XJ$ を Y 方向に微分すると、

$$YX + JDX(Y) = -DX(Y)\cdot J - XY$$

となり、これより、

$$\begin{aligned} J\nabla_Y X &= JDX(Y) + \frac{1}{2}(XY + YX) \\ &= -DX(Y)\cdot J - \frac{1}{2}(XY + YX) = -\nabla_Y X \cdot J \end{aligned}$$

を得るので、$\nabla_Y X \in T_J\mathcal{A}$ である。次に、
[Claim] ∇ は計量接続（metric connection）である。

[証明] $g_0 \in \mathcal{M}$ をとり固定する。$\mathcal{A}$ 上の計量 (,) を、点 $J \in \mathcal{A}$ において

$$(X, Y)_J = \int_M \mathrm{tr}\big(X(J)\cdot Y(J)\big)d\mu_{g_0}$$

により定義する。これは、L^2-計量とは異なる（L^2-計量は、$d\mu_{g_0}$ が $d\mu_{g(J)}$ である）。まず、

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = DY(X) - DX(Y) = [X, Y]$$

は明らかである。次に、任意の $X, Y, Z \in T_J\mathcal{A}$ に対して、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\{J(XY + YX)Z\} &= \mathrm{tr}\{(XY + YX)Z\cdot J\} \\ &= -\mathrm{tr}\{J\cdot(XY + YX)Z\} \end{aligned}$$

より、$\mathrm{tr}\{J(XY+YX)Z\}=0$ であるから、

$$
\begin{aligned}
Z(X,Y)_J &= \int_M \mathrm{tr}\{DX(Z)\cdot Y + XDY(Z)\}d\mu_{g_0} \\
&= \int_M \mathrm{tr}\{\nabla_Z X\cdot Y + \frac{1}{2}J(XZ+ZX)Y + X\nabla_Z Y + \frac{1}{2}XJ(YZ+ZY)\}d\mu_{g_0} \\
&= (\nabla_Z X, Y)_J + (X, \nabla_Z Y)_J
\end{aligned}
$$

となり、主張は確かめられた。

定理 5.1. $\nabla\Phi\equiv 0$ が成り立つ。

[証明] 任意の $X,Y\in T_J\mathcal{A}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
(\nabla\Phi)(X,Y) &= \nabla_Y(\Phi(X)) - \Phi(\nabla_Y X) \\
&= \nabla_Y(JX) - J\nabla_Y X \\
&= D(JX)(Y) - \frac{1}{2}J(JXY+YJX) - J\{DX(Y) - \frac{1}{2}J(XY+YX)\} \\
&= YX + JDX(Y) + \frac{1}{2}(XY-YX) - JDX(Y) - \frac{1}{2}(XY+YX) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるからである。 [証明終]

さて、$\hat{\nabla}$ を $(\mathcal{A}/\mathcal{D}_0, <<\cdot,\cdot>>_{L^2})$ のレビ＝チビタ（Levi-Civita）接続とする。これは次の方程式で一意的に定義される：

$$
\begin{aligned}
2<<\hat{\nabla}_Y X, W>> = Y<<X,W>> &+X<<Y,W>> -W<<X,Y>> \\
&+<<[Y,X],W>> - <<[Y,W],X>> - <<[X,W],Y>> .
\end{aligned}
$$

これはまた、次の二つの方程式をみたすことと同値である：

$$
\begin{cases}
X<<V,W>> = <<\hat{\nabla}_X V, W>> + <<V, \hat{\nabla}_X W>>, \\
\hat{\nabla}_V W - \hat{\nabla}_W V = [V,W].
\end{cases}
$$

定理 5.2. $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ を水平ベクトル場であるとするとき、

$$
\left(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}\right)^H = \left(\hat{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}\right)^H
$$

が成り立つ。すなわち、$\nabla,\hat{\nabla}$ はともに $\mathcal{T}(M)=\mathcal{A}/\mathcal{D}_0$ に同じ接続を定める。

[証明] 任意の水平ベクトル場 $\widetilde{X},\widetilde{V},\widetilde{W}$ に対して、

$$
\begin{cases}
\widetilde{X}<<\widetilde{V},\widetilde{W}>> = <<\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V},\widetilde{W}>> + <<\widetilde{V},\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{W}>> \\
\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} - \nabla_{\widetilde{W}}\widetilde{V} = [\widetilde{V},\widetilde{W}]
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

を示せば、L^2-計量 $<<\cdot,\cdot>>_{L^2}$ に対する Levi-Civita 接続の一意性より、定理の主張は得られる。まず、(5.1) の二番目の等式が成り立つのは明らかであろう。一番目の等式も、$D\mu_{g(J)}(\widetilde{X})=0$ であることがわかれば明らかである。ここで、$\widetilde{\Psi}:\mathcal{A}\ni J\longrightarrow g(J)\in\mathcal{M}_{-1}$ としたとき、

$$D\mu_{g(J)}(\widetilde{X})=\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{g(J)}\{D\widetilde{\Psi}(J)(\widetilde{X})\}\mu_{g(J)}=0$$

が成り立つ（二番目の等式は、$D\widetilde{\Psi}(J)$ が水平ベクトル場を水平ベクトル場に移すことからわかる、[Q19] を参照）ので、主張は確かめられた。 [証明終]

定理 **5.3.** $(\mathcal{T}(M)=\mathcal{A}/\mathcal{D}_0,<<\cdot,\cdot>>_{L^2})$ はケーラー多様体である。

[証明] $X,Y\in\mathcal{X}^\infty(\mathcal{T}(M))$ とし、$\widetilde{X},\widetilde{Y}$ を、それぞれ、X,Y の $\mathcal{A}$ への水平持ち上げとする。定理 5.2 により、$\hat{\nabla}$ から誘導される $\mathcal{T}(M)$ 上の Levi-Civita 接続を$\hat{\nabla}^H$ で表すと、$\hat{\nabla}^H_X\circ D\pi=D\pi\circ\hat{\nabla}_{\widetilde{X}}$ であるから、

$$\big(\hat{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\big)^H=\big(\widetilde{\hat{\nabla}^H_X Y}\big)\tag{5.2}$$

である。定理 5.2 と (5.2) を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}(\hat{\nabla}^H\hat{\Phi})(X,Y)&=\hat{\nabla}^H_Y\hat{\Phi}(X)-\hat{\Phi}(\hat{\nabla}^H_YX)\\&=\hat{\nabla}^H_YD\pi\Phi(\widetilde{X})-D\pi\Phi(\widetilde{\hat{\nabla}^H_YX})\\&=D\pi\hat{\nabla}_{\widetilde{Y}}\Phi(\widetilde{X})-D\pi\Phi(\hat{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})^H\\&=D\pi\{\hat{\nabla}_{\widetilde{Y}}(\Phi\widetilde{X})-\Phi\hat{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}\}\\&=D\pi\{\nabla_{\widetilde{Y}}(\Phi\widetilde{X})-\Phi\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}\}\\&=D\pi\{(\nabla\Phi)(\widetilde{X},\widetilde{Y})\}\end{aligned}$$

となり、これと定理 5.1 により$\hat{\nabla}^H\hat{\Phi}\equiv0$ であるから、$<<\cdot,\cdot>>_{L^2}$ はケーラー計量である。 [証明終]

つぎに、$\mathcal{T}(M)$ の正則断面曲率、断面曲率およびリッチ曲率が負になることを示そう。代数的対称接続 ∇ の曲率テンソルを、$R(X,Y)Z=\big(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}\big)Z$ とするとき

$$R(X,Y)Z=\frac{1}{4}\big(-XYZ-ZYX+YXZ+ZXY\big)$$

が成り立つ（[Q20] を参照）。従って、X,Y が一次独立ならば、

$$\begin{aligned}<<R(X,Y)Y,X>>&=\frac{1}{2}\int_M\mathrm{tr}\{-Y^2X^2+YXYX\}d\mu_{g(J)}\\&=-2\int_M(ad-bc)^2d\mu_{g(J)}<0\end{aligned}\tag{5.3}$$

となる。ここで、$X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ とした。さて、これは、$\mathcal{T}(M)$ の断面曲率ではないが、何らかの情報を与えていることは確かである。$(\mathcal{T}(M), << \cdot, \cdot >>)$ の断面曲率を $K(X,Y)$ で表すと、

$$K(X,Y) =<< \hat{\nabla}_{\widetilde{X}}\big(\hat{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Y}\big)^H - \hat{\nabla}_{\widetilde{Y}}\big(\hat{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\big)^H - \hat{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^H}\widetilde{Y}, \widetilde{X} >>$$

である。ここで、定理 5.2 を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= << R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Y}, \widetilde{X} >> + << (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Y})^V, \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X} >> \\ &\quad - << (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^V, \nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} >> + << \nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V}\widetilde{Y}, \widetilde{X} >> \end{aligned} \tag{5.4}$$

となる。ここに、W^V などは $W \in T_J\mathcal{A}$ の vertical 方向の成分を表す。以下、右辺の第二項以下を具体的に評価する。以下では、記号の簡略化のため、δ_g は、$\delta_{g(J)}$ を表すものとする。

命題 5.1. $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in T_J\mathcal{A}$ を水平ベクトルとするとき、以下のことが成り立つ：
(1) $\delta_g[\widetilde{Y},\widetilde{X}] = \delta_g(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}) = \delta_g(D_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}) = d\lambda$,
(2) $\delta_g(D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + D_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}) = - * d\mu$,
(3) $\delta_g(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + \nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}) = *d\mu$,
ここに、$\lambda = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\big(J(\widetilde{X}\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\widetilde{X})\big), \mu = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\big(\widetilde{X}\widetilde{Y} + \widetilde{Y}\widetilde{X}\big)$ であり、$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ としたとき、

$$\lambda = ad - bc \quad , \qquad \mu = ac + bd$$

である。

証明は、共形座標系を用いて、$\delta_g \circ D = D \circ \delta_g$ などの性質を利用して計算する。また、$*$ は、Hodge の star operator であり、共形座標で $\omega = \zeta dx + \eta dy$ と表したとき、$*\omega = -\eta dx + \zeta dy$ となるもので、従って、$*^2 = -1$ である。

補題 5.1. 水平ベクトル $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ に対して、$[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V = L_\beta J$ と表したとき、$\delta_g\beta = 0$ が成り立つ。（このとき、β によって生成される一助変数微分同相部分群は M の体積を保つ。）

[証明] $H = [\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V$ とおき、$h = (HJ)_\flat$ とおく。C^∞-微分同相写像 $\widetilde{\Psi} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}_{-1}$ にたいして、$g = \widetilde{\Psi}(J)$ とおくとき、

$$D\widetilde{\Psi}(J)H = h + \rho g, \qquad \Delta\rho - \rho = \delta_g\delta_g h$$

が成り立つ（[Q19] を参照）。命題 5.1 に従って、$\delta_g[\widetilde{Y},\widetilde{X}] = d\lambda$ とおくとき、$\delta_g(HJ) = \delta_g(J[\widetilde{Y},\widetilde{X}]^V) = *d\lambda$ であるから（$\delta_g W^H = 0$ であることに注意）、

$$\delta_g\delta_g h = \delta_g * d\lambda = - * dd\lambda = 0$$

を得る。従って、$\rho = 0$ である。一方、$\widetilde{\Psi}$ は $\mathcal{D}$-同変であるから、$f \in \mathcal{D}$ にたいして、$\widetilde{\Psi}(f^*J) = f^*\widetilde{\Psi}(J)$ が成り立つから、この式を微分することにより、

$$D\widetilde{\Psi}(J)L_\beta J = L_\beta g \quad , \qquad \text{for} \quad \beta = \frac{df_t}{dt}\,|_{t=0}, f_t \in \mathcal{D}, f_0 = \text{identity}$$

を得るが、左辺$= D\widetilde{\Psi}(J)[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V = D\widetilde{\Psi}(J)H = h$ であったから、

$$\delta_g \beta = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(L_\beta g) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g h = 0$$

となり主張は確かめられた。 [証明終]

補題 5.1 から、つぎのことが簡単な計算により確かめられる：

系 **5.1.** *V, W, Z を、それぞれが、水平ベクトル場であるか、または、M の体積を保つ一助変数微分同相群から生成される vertical ベクトル場であるとすると、*

$$<< \nabla_V Z, W >> = << \hat{\nabla}_V Z, W >>$$

が成り立つ。

補題 **5.2.** *T を、M の一助変数微分同相部分群から生成される vertical ベクトル場とし、$\widetilde{X},\widetilde{Y}$ を $\mathcal{T}(M)$ 上のベクトル場 X, Y の水平持ち上げとするとき、$\mathcal{T}(M)$ 上で、つぎが成り立つ：*

$$<< \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{X}, T >> = \frac{1}{2} << [\widetilde{Y}, \widetilde{X}], T >> \quad .$$

[証明]

$$\begin{aligned} 2 << \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{X}, T >> &= \widetilde{Y} << \widetilde{X}, T >> + \widetilde{X} << \widetilde{Y}, T >> - T << \widetilde{X}, \widetilde{Y} >> \\ &\quad + << [\widetilde{Y}, \widetilde{X}], T >> - << [\widetilde{Y}, T], \widetilde{X} >> - << [\widetilde{X}, T], \widetilde{Y} >> \end{aligned}$$

において、右辺の第1,2項は明らかに0であり、第5項は、$D\pi([\widetilde{Y}, T]) = [D\pi(\widetilde{Y}), D\pi(T)] = 0$ より、$[\widetilde{Y}, T]$ が vertical ベクトル場であるから 0 であり、第6項も同様に 0 である。最後に π は Riemann submersion になっており、$<< \widetilde{X}, \widetilde{Y} >>$ は vertical 方向には一定値をとるので、vertical ベクトル場 T で微分すると 0 になる。 [証明終]

さて、

$$\begin{aligned} << \nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V} \widetilde{Y}, \widetilde{X} >> &= << \nabla_{\widetilde{Y}} [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V, \widetilde{X} >> + << [[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V, \widetilde{Y}], \widetilde{X} >> \\ &= - << [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V, \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{X} >> \end{aligned}$$

であるから、補題 5.2 において、$T = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V$ ととることにより、つぎを得る：

$$(5.5) \qquad << \nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V} \widetilde{Y}, \widetilde{X} >> = \frac{1}{2} \parallel [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V \parallel^2 \quad .$$

また、

$$(5.6)\quad -<<(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^V,\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}>>=<<[\widetilde{Y},\widetilde{X}]^V,\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}>>-<<(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})^V,\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}>>$$
$$=\frac{1}{2}\parallel[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V\parallel^2-\parallel(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})^V\parallel^2$$

となるから、(5.5) と (5.6) を、(5.4) に代入することにより、つぎを得る：

$$(5.7)\quad K(X,Y)=<<R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Y},\widetilde{X}>>+<<(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Y})^V,\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}>>$$
$$+\parallel[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V\parallel^2-\parallel(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})^V\parallel^2 \quad .$$

補題 **5.3.** *vertical* ベクトル $H=L_\beta J$ にたいして、ある関数 $\lambda: M\longrightarrow \mathbf{R}$ があって、$\delta_g H=*d\lambda$ をみたしているとする。このとき、$\delta_g\beta=\rho$ となる。ここに、ρ は、$\Delta\rho-\rho=\Delta\lambda$ の解である。

[証明] 補題 5.1 の証明から、$h=(HJ)_\flat$ とおくとき、

$$D\widetilde{\Psi}(J)H=L_\beta g=h+\rho g \quad ,$$
$$\Delta\rho-\rho=\delta_g\delta_g h$$

である。ところが、

$$\delta_g h=-\delta_g(JH)_\flat=-*\delta_g H=-**d\lambda=d\lambda$$

となるから、$\delta_g\delta_g h=\Delta\lambda=\Delta\rho-\rho$ であり、

$$\rho=\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(h+\rho g)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(L_\beta g)=\delta_g\beta$$

となる。 [証明終]

命題 **5.2.** $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ を $\mathcal{T}(M)$ 上のベクトル場 X,Y の水平持ち上げとし、共形座標系での表示を、$\widetilde{X}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix},\widetilde{Y}=\begin{pmatrix}c & d\\ d & -c\end{pmatrix}$ とし、$\lambda=ad-bc$ とおく。このとき、

$$(5.8)\quad \parallel[\widetilde{Y},\widetilde{X}]^V\parallel^2=2\int_M\lambda^2 d\mu_{g(J)}+2\int_M(\mathcal{L}^{-1}\lambda)\lambda d\mu_{g(J)}$$

である。ここに、$\mathcal{L}=\Delta-1$ であり、$\mathcal{L}^{-1}$ は、その逆作用素であり、負定値、可逆、自己随伴作用素である。

[証明] $[\widetilde{Y},\widetilde{X}]^V=L_\beta J$ とおけば、$\parallel[\widetilde{Y},\widetilde{X}]^V\parallel^2=\parallel L_\beta J\parallel^2$ である。いま、$\alpha_J(\beta)=L_\beta J$ で定義される写像$\alpha_J:\chi^\infty(M)\longrightarrow C^\infty(T^1_1M)$ を考えれば、定理 1.5 の証明に用いた α_g と同様にして、$g_{ij}=p\delta_{ij}$ としたとき、

$$\alpha^*_J(A)=\big(-\frac{2}{p}(\delta_gA)_2,\frac{2}{p}(\delta_gA)_1\big)$$

を得る。ここに、$(\delta_g A)_i$ は、$\delta_g A$ の i 番目の成分を表す。いま、$A=\alpha_J(\beta)$ の場合を考える。命題 5.1-(1) より、

$$\begin{aligned}\delta_g(\alpha_J(\beta)) &= \delta_g([\widetilde{Y},\widetilde{X}]^V)\\ &= d\lambda\end{aligned}$$

と表せ、$\lambda = ad-bc$ である。これより、

$$\alpha_J^*(\alpha_J(\beta)) = \big(-\frac{2}{p}\frac{\partial}{\partial y}(ad-bc), \frac{2}{p}\frac{\partial}{\partial x}(ad-bc)\big)$$

となる。従って、

$$\begin{aligned}\| [\widetilde{Y},\widetilde{X}]^V \|^2 &= \| \alpha_J(\beta) \|^2\\ &= << \alpha_J^*\alpha_J(\beta), \beta >>\\ &= 2\int_M \big(-p\beta^1\frac{\partial}{\partial y}(ad-bc) + p\beta^2\frac{\partial}{\partial x}(ad-bc)\big)dxdy\\ &= 2\int_M \lambda\big(\delta_g(J\beta)\big)d\mu_g\end{aligned} \tag{5.9}$$

を得る。ここに、$\beta = (\beta^1,\beta^2)$ であり、最後の等式では、部分積分を用いた。さらに、

$$\begin{aligned}*d\lambda &= *\delta_g(L_\beta J)\\ &= \delta_g(JL_\beta J) = \delta_g(L_{J\beta}J)\end{aligned}$$

であるから、これと補題 5.3 より、$\delta_g(J\beta) = \rho, \Delta\rho - \rho = \Delta\lambda$ である。2 番目の等式は、$\mathcal{L}\rho = (\mathcal{L}+1)\lambda$ とも表されるから、$\rho = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}+1)\lambda = \lambda + \mathcal{L}^{-1}\lambda$ となるから、これと、(5.9) より主張は確かめられる。 [証明終]

補題 **5.4.** *(1)*

$$\begin{aligned}<< \nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}, (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^V >> &= - << \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^V >>\\ &= \frac{1}{2} \| [\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V \|^2\end{aligned}$$

(2) $\| (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})^V \|^2 = \| (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^V \|^2$

[証明] (1) は、(5.5) と、$\| [\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V \|^2$ が、$\widetilde{X}$ と $\widetilde{Y}$ について対称であることから得られる。(2) は、(1) の 1 番目の等式から得られる。 [証明終]

補題 **5.5.** $T = L_\beta J$ を *vertical* ベクトル場とし、$\widetilde{Y}$ を水平ベクトル場とするとき、つぎが成り立つ：

$$<< \nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Y}, T >>_J = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(\widetilde{Y}^2)\delta_g\beta d\mu_{g(J)} \quad .$$

[証明] まず、

$$0 = \widetilde{Y} << \widetilde{Y}, T >>=<< \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{Y}, T >> + << \widetilde{Y}, \nabla_{\widetilde{Y}} T >>,$$
$$0 = T << \widetilde{Y}, \widetilde{Y} >>= 2 << \nabla_T \widetilde{Y}, \widetilde{Y} >> + \int_M \mathrm{tr}(\widetilde{Y}^2) D_T\big(d\mu_{g(J)}\big)$$

を得るが、ここで、

$$D_T\big(d\mu_{g(J)}\big) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(L_\beta g) d\mu_{g(J)} = \delta_g \beta d\mu_{g(J)}$$

であることと、

$$<< \nabla_T \widetilde{Y}, \widetilde{Y} >> =<< \nabla_{\widetilde{Y}} Y + [T, \widetilde{Y}], \widetilde{Y} >>=<< \nabla_{\widetilde{Y}} T, \widetilde{Y} >>$$

より、求める等式を得る。 [証明終]

補題 **5.6.**

$$<< (\nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{Y})^V, \nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{X} >> = \frac{1}{2}\int_M (c^2+d^2)\rho d\mu_g = \frac{1}{2}\int_M (a^2+b^2)\theta d\mu_g,$$

である。ここで、$\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ は、命題 5.2 のように行列表示されたと仮定し、また、

$$\begin{cases} \mathcal{L}\rho = (\mathcal{L}+1)(a^2+b^2) \\ \mathcal{L}\theta = (\mathcal{L}+1)(c^2+d^2) \end{cases}$$

である。従って、つぎが成り立つ：

$$\begin{aligned} &<< (\nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{Y})^V, \nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{X} >> \\ =&\frac{1}{2}\int_M (a^2+b^2)(c^2+d^2) d\mu_g + \frac{1}{2}\int_M \big(\mathcal{L}^{-1}(a^2+b^2)\big)(c^2+d^2) d\mu_g. \end{aligned} \tag{5.10}$$

[証明] 補題 5.5 において、$T = (\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{X})^V$ ととる。$\mathrm{tr}(\widetilde{Y}^2) = 2(c^2+d^2)$ であり、命題 5.1-(3) において、$\widetilde{X} = \widetilde{Y}$ の場合を考えれば、

$$\delta_g((\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{X})^V) = \frac{1}{2} * d\mu = *d(\frac{1}{2}\mu),$$
$$\mu = a^2 + b^2$$

である（命題 5.1 の $\widetilde{X}$ は、この補題の $\widetilde{X}$ と同じものと考え、この補題の$\widetilde{Y}$ は別のものとして考える)。従って、$\delta_g \beta = \frac{1}{2}\rho$ とおくと、補題 5.3 より、

$$\Delta\rho - \rho = 2 \times (\Delta(\frac{1}{2}(a^2+b^2)) = \Delta(a^2+b^2)$$

が得られ、これは、$\mathcal{L}\rho = (\mathcal{L}+1)(a^2+b^2)$ と同じ式である。θ についても、作用素の可逆性と自己随伴性より得られる。 [証明終]

命題 **5.3.** $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ を、補題 5.6 のものとしたとき、つぎが成り立つ：

$$\| (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} + \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^V \|^2 = 2\int_M (ac+bd)^2 d\mu_g + 2\int_M \big(\mathcal{L}^{-1}(ac+bd)\big)(ac+bd)d\mu_g \quad .$$

[証明] $H = (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} + \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^V$ とすると、命題 5.1-(3) より、$\delta_g H = *d\mu$ であり、ここで、$\mu = ac + bd$ である。そこで、$H = L_\beta J$ と考え、$\delta_g\beta = \rho$ とおくと、補題 5.3 より、$\Delta\rho - \rho = \Delta\mu$ であり、従って、$\rho = \mu + \mathcal{L}^{-1}\mu$ であり、

$$\begin{aligned}\delta_g\beta &= \rho \\ &= \mu + \mathcal{L}^{-1}\mu = (ac+bd) + \mathcal{L}^{-1}(ac+bd)\end{aligned}$$

となる。以下、命題 5.2 と同様にして、

$$\begin{aligned}\| H \|^2 &= << \alpha_J^*\alpha_J(\beta), \beta >> \\ &= 2\int_M (ac+bd)\delta_g\beta d\mu_g \\ &= 2\int_M \Big((ac+bd)^2 + \big(\mathcal{L}^{-1}(ac+bd)\big)(ac+bd)\Big)d\mu_g\end{aligned}$$

が得られる。 [証明終]

命題 **5.4.** つぎが成り立つ：

$$\begin{aligned}(5.11)\qquad & -\| (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})^V \|^2 \\ =& -\frac{1}{2}\int_M (ac+bd)^2 d\mu_g - \frac{1}{2}\int_M \big(\mathcal{L}^{-1}(ac+bd)\big)(ac+bd)d\mu_g \\ & -\frac{1}{2}\int_M (ad-bc)^2 d\mu_g - \frac{1}{2}\int_M \big(\mathcal{L}^{-1}(ad-bc)\big)(ad-bc)d\mu_g\end{aligned}$$

[証明] 補題 5.4-(1) と (5.8) から、

$$\begin{aligned}(5.12)\qquad \| (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^V \|^2 &= \| [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V \|^2 \\ &= 2\int_M \lambda^2 d\mu_g + 2\int_M \big(\mathcal{L}^{-1}\lambda\big)\lambda d\mu_g\end{aligned}$$

を得る。補題 5.4-(2) から、

$$\| (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})^V \|^2 = \frac{1}{4}\{\| (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} + \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^V \|^2 + \| (\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^V \|^2\}$$

であるから、これを用いて、(5.12) と命題 5.3 の等式を加えることにより、求める等式が得られる。 [証明終]

以上、(5.3), (5.8), (5.10), (5.11) を (5.7) に代入して整理すると、つぎが得られる：

$$\begin{aligned}(5.13)\qquad K(X,Y) =& \frac{1}{2}\int_M \{\big(\mathcal{L}^{-1}(a^2+b^2)\big)(c^2+d^2) - \big(\mathcal{L}^{-1}(ac+bd)\big)(ac+bd)\}d\mu_g \\ & + \frac{3}{2}\int_M \big(\mathcal{L}^{-1}(ad-bc)\big)(ad-bc)d\mu_g \quad .\end{aligned}$$

(5.13) より、つぎの定理が得られる：

定理 **5.4.** $(\mathcal{T}(M), << \cdot, \cdot >>_{L^2})$ の正則断面曲率は、$-1/(16\pi(p-1))$ 以下である。ここに p は M の種数である。

[証明] (5.13) において、$Y = JX$ とすると、$a = d, b = -c$ と同値であるから、$\lambda = a^2 + b^2, \mu = 0$ であるから、

$$K(X, JX) = 2\int_M \big(\mathcal{L}^{-1}\lambda\big)\lambda d\mu_g$$

となる。これより、$K(X, JX) < 0$ が得られるが、さらに、$\| X \|^2 = 1$ とすると、

$$2\int_M \lambda d\mu_g = 1$$

であるが、ここで、$2\lambda = \mathcal{L}f = \Delta f - f$ の解 f をとると、

$$-\int_M f d\mu_g = 2\int_M \lambda d\mu_g = 1$$

であり、これと Cauchy-Schwarz の不等式より、

$$\begin{aligned} K(X, JX) &= \frac{1}{2}\int_M \big(\mathcal{L}f\big) f d\mu_g = \frac{1}{2}\int_M (\Delta f \cdot f - f^2) d\mu_g \\ &\square -\frac{1}{2}\int_M f^2 d\mu_g \square -\frac{1}{2}\Big(\int_M f d\mu_g\Big)^2 / \mathrm{vol}(M) = -1/(2\mathrm{vol}(M)) \end{aligned}$$

が得られる。g は、スカラー曲率 -1 の計量であったから、ガウス曲率は、$-1/2$ である。従って、ガウス＝ボンネ（Gauss-Bonnet) の定理より、$\mathrm{vol}(M) = 8\pi(p-1)$ であるから、求める評価式を得る。 [証明終]

つぎに、断面曲率 K が負であることを示そう。

補題 **5.7.** M 上の任意の C^2-関数 ξ, η にたいして、

$$| \mathcal{L}^{-1}(\xi\eta) | \square | -\mathcal{L}^{-1}\xi^2 |^{1/2} \cdot | -\mathcal{L}^{-1}\eta^2 |^{1/2} \quad .$$

[証明] M は、$M = \mathbf{H}/\Gamma$ と表せる（$\mathbf{H}$ は上半平面、Γ は、$SL_2(\mathbf{R})$ の部分群である）が、基本領域 $\mathbf{H}/\Gamma$ において、$-\mathcal{L}$ の Green 関数が正であるから、$-\mathcal{L}$ の基本解も正である。ここで、$| \xi\eta | \square | \xi^2 |^{1/2} \cdot | \eta^2 |^{1/2}$ であるから、これと Hölder の不等式より求める不等式を得る。 [証明終]

補題 5.7 と Hölder の不等式を (5.13) に項別に適用することにより、

$$-\int_M \big(\mathcal{L}^{-1}\mu\big)\mu d\mu_g \square -\int_M \big(\mathcal{L}^{-1}(a^2 + b^2)\big)(c^2 + d^2) d\mu_g$$

を得る。従って、つぎの定理を得る：

定理 **5.5.** タイヒミュウラー空間の L^2-計量（*Weil-Petersson* 計量）に関する断面曲率は、いたるところ負である。

さらに、つぎが得られる：

定理 **5.6.** タイヒミュウラー空間の L^2-計量に関するリッチ曲率 Ric は、

$$\mathrm{Ric} < -\frac{1}{16\pi(p-1)}$$

をみたす。ここに、p は、M の種数である。

[証明] 正規直交基底を、$\{X_1 = X, X_2 = JX, X_3, \cdots, X_{6p-6}\}$ として選ぶ。このとき、$\mathrm{Ric}(X,X) = \sum_{i=2}^{6p-6} K(X, X_i)$ と表せるが、定理 5.4 および定理 5.5 より、

$$\mathrm{Ric}(X,X) = K(X,JX) + \sum_{i=3}^{6p-6} K(X,X_i) < -\frac{1}{16\pi(p-1)}$$

となる。 [証明終]

[補足] $\mathcal{T}(M)$ の正則断面曲率およびリッチ曲率の評価式は、L. Ahlfors（"Curvature properties of Teichmüller space", J. d'Analyse Math. **9**(1961), pp161-176）により得られている。断面曲率が負であることを示したのは、A.J.Tromba が最初であり、そのすぐ後、S.Wolpert（Invent. Math. **85**(1986), pp119-145）が示し、その後、Y.T.Siu, J.Jost, M.Wolf 等が示している。Y.T.Siu（"Curvature of the Weil-Petersson metric in the moduli space of compact Kähler-Einstein manifolds of negative first Chern class", edited by K. Diederich, Aspects of Mathematics, vol 9, pp261-298, Vieweg）は、第一チャーン類が負のコンパクト・ケーラー＝アインシュタイン多様体のモジュライ空間の、Weil-Petersson 計量の曲率の計算をしている。M.Wolf（"The Teichmüller Theory of Harmonic maps", J. Differential Geom. **29**(1989), pp449-479）は、§3 で考えたエネルギー汎関数 $\widetilde{E} : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathbf{R}$ のかわりに、Domain の計量は固定しておき、Range の計量を動かすことにより得られる C^∞-汎関数 $\mathbf{E} : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathbf{R}$ を導入し、§3 と同様の結果を証明している。実際、Proper 性の証明が、$\widetilde{E}$ のそれより易しいし、ここでは述べなかったが、エネルギー汎関数が、strict に plurisubharmonic（多重劣調和）という性質が、$\widetilde{E}$ のそれより強い条件を生み出し、S. Wolpert が解決した Nielsen 実現問題（Realization Problem）への別証明を A.Tromba が与えるきっかけとなった（A.Tromba, "Teichmüller Theory in Riemannian Geometry", 第６章を参照）。また、M.Wolf は、上の $\mathbf{E}$ の４階微分から、Weil-Petersson 計量の曲率が計算できることを示した。最後に、Y.Imayoshi, M.Taniguchi（"An Introduction to Teichmüller Spaces", Springer-Verlag）の Appendix B では、$\mathcal{T}(M)$ のコンパクト化（compactification）についての記述がされていることを記しておく。

補 助 解 説

[Q1] $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし、これらに関する $d(\psi \circ \varphi^{-1})$ の表現行列を $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1} : \textit{holomorphic} &\Leftrightarrow P(\mathbf{e}_1 - \sqrt{-1}\mathbf{e}_2) = c(\mathbf{e}_1 - \sqrt{-1}\mathbf{e}_2) \quad (c \in \mathbf{C}) \\ &\Leftrightarrow x = w, y = -z \end{aligned}$$

[Q2] $\hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であり、$J = S\hat{J}S^{-1}$ とおける。ここで、$\hat{H} = S^{-1}HS$ とおくと、

$$JH + HJ = \mathbf{0} \Leftrightarrow \hat{J}\hat{H} + \hat{H}\hat{J} = \mathbf{0} \quad ,$$
$$\mathrm{tr}(H) = \mathrm{tr}(JH) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}(\hat{H}) = \mathrm{tr}(\hat{J}\hat{H}) = 0 \quad .$$

ここで、$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると、$\mathrm{tr}(\hat{H}) = a + d, \mathrm{tr}(\hat{J}\hat{H}) = b - c$, 一方、$\hat{J}\hat{H} + \hat{H}\hat{J} = \begin{pmatrix} b-c & -(a+d) \\ a+d & b-c \end{pmatrix}$ であるから、

$$\hat{J}\hat{H} + \hat{H}\hat{J} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathrm{tr}(\hat{H}) = \mathrm{tr}(\hat{J}\hat{H}) = 0$$

が得られる。

[Q3] 任意の $h \in T_g\mathcal{M}^s$ は、

$$h = \left(h - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g h) \cdot g\right) + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g h) \cdot g$$

と分解され、右辺の第一項は $\left(S_2^s(g)\right)^T$ の元であり、右辺の第二項は $\left(S_2^s(g)\right)^c$ の元である。次に、$h \in \left(S_2^s(g)\right)^T$ にたいして、

$$\begin{aligned} << p \cdot g, h >>_g &= \int_M \sum g^{ik} g^{jl} p g_{ij} h_{kl} d\mu_g \\ &= p \int_M \mathrm{tr}_g h d\mu_g = 0 \end{aligned}$$

従って、$T_g\mathcal{M}^s = \left(S_2^s(g)\right)^c \oplus \left(S_2^s(g)\right)^T$ は L^2-orthogonal splitting である。

[Q4] Φ の定義により、$(\Phi(g))^i_j = -\sum_k g^{ik}(\mu_g)_{kj}$ と表せる。ここで、g^{ik} はリーマン計量 g の、局所座標系に関する成分行列 (g_{ik}) の逆行列の成分である。このとき、

$$\begin{aligned} g(u, \Phi(g)(v)) &= \sum_{i,j,k} g_{ij} u^i (\Phi(g))^j_k v^k \\ &= -\sum_{i,j,k,l} g_{ij} u^i g^{jl} (\mu_g)_{lk} v^k \\ &= -\sum_{i,k} (\mu_g)_{ik} u^i v^k = -\mu_g(u, v) \end{aligned}$$

三番目の等式では、$\sum_j g_{ij}g^{jl} = \delta_i^l$ を用いた。

[Q5] [The surjectivity of $\Gamma : \mathcal{C}^s \longrightarrow \mathcal{A}^s$]

任意の $J \in \mathcal{A}^s$ が与えられたとする。$\Phi^{-1}(J) = [g] \in \mathcal{M}^s/\mathcal{P}^s$ により与えられる同値類 $[g]$ から一つ代表元 $\tilde{g}$ を選ぶ。$\tilde{g}$ にたいして共形座標系を選ぶ（これは代表元の取り方によらない）。二つの共形座標チャート $\varphi : U_\varphi \longrightarrow \mathbf{R}^2, \psi : U_\psi \longrightarrow \mathbf{R}^2$ をとったとき、$\varphi \circ \psi^{-1}$ は $U_\varphi \cap U_\psi$ 上で向きを保つ共形写像であるが、M の次元が 2 であることから、これは正則写像であることがわかる。従って、共形座標チャート全体の集合は M に複素構造 c を与える。$\Gamma(c) = J$ を示せばよい。共形座標系において、$g = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ と表せたとすると、$\mu_g = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & 0 \end{pmatrix}$ となる。したがって、

$$J = \Phi(g) = -g^{-1}\mu_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

一方、$d\varphi_x = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (x \in U_\varphi)$ と表せるから、

$$\Gamma(c)_x = d\varphi_x^{-1} \circ \hat{J} \circ d\varphi_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

を得る。従って、Γ は全射である。

[Q6] $\alpha_g(X) = L_X g$ であるが、リー微分の定義より、

$$\begin{aligned}
&(L_X g)(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) \\
&= (L_X g)_{ij} \\
&= \sum_k \big(X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik}\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + g_{jk}\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\big) \\
&= \sum_k \big(\nabla_i X^k g_{kj} + \nabla_j X^k g_{ik}\big)
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
<< \alpha_g(X), h >> &= \frac{1}{2}\int_M \sum_{i,j,k} \big(g_{kj}h^{ij}\nabla_i X^k + g_{ik}h^{ij}\nabla_j X^k\big) d\mu_g \\
&= \int_M \sum_{i,j,k} g_{kj}h^{ij}\nabla_i X^k d\mu_g \\
&= \int_M \sum_{i,j,k} \nabla_i(X^k g_{kj}h^{ij}) d\nu_g - \int_M \sum_{i,j,k} g_{kj}X^k\nabla_i h^{ij} d\mu_g \\
&= - << X, \delta_g h >>
\end{aligned}$$

を得る。

[Q7] $\|u\| = \sqrt{\mathrm{E}(g,u)} + |m(u)|$ とおくとき、$\|u\| \geq 0$ であることは明らか。$\|u\| = 0$ となるのは　$\mathrm{E}(g,u) = 0, m(u) = 0$ のときのみであるが、最初の式から、u は M 上で定数であることがわかる。また、第二式より、$\int_M u d\mu_g = 0$ であるから、u が定数ならば $u \equiv 0$ であることがわかる。次に、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(g, u+v) &= \frac{1}{2}\|du + dv\|_g^2 \\
&\square\ \frac{1}{2}(\|du\|_g + \|dv\|_g)^2
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\mathrm{E}(g, u+v)} &\square\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\|du\|_g + \|dv\|_g) \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\|du\|_g^2} + \sqrt{\frac{1}{2}\|dv\|_g^2} = \sqrt{\mathrm{E}(g,u)} + \sqrt{\mathrm{E}(g,v)}
\end{aligned}
$$

であり、また、$m(u+v) = m(u) + m(v)$ であることは容易にわかるので、$|m(u+v)|\ \square\ |m(u)| + |m(v)|$ である。以上より、$\|u+v\|\ \square\ \|u\| + \|v\|$ が得られる。最後に、$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\| \quad (\lambda \in \mathbf{R})$ であることは明らか。

[Q8] [$DR(g_0)h = -\Delta_{g_0}(\mathrm{tr}_{g_0} h) + \delta_{g_0}\delta_{g_0} h + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{g_0} h$ の証明]

$Dg_{ij} = h_{ij}$ のとき、$Dg^{ij} = -h^{ij}$ である。いま、

$$
X^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha h^{\gamma}_{\beta} + \nabla_\beta h^{\gamma}_{\alpha} - \nabla^{\gamma} h_{\alpha\beta})
$$

とおくと、$DR^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \nabla_\gamma X^{\alpha}_{\beta\delta} - \nabla_\delta X^{\alpha}_{\beta\gamma}$ であることが、曲率テンソルを g で表す公式を用いることによりわかる。Ricci テンソル $R_{\beta\delta} = \sum_\alpha R^{\alpha}_{\beta\alpha\delta}$ の変分 $DR_{\beta\delta}$ は、

$$
\begin{aligned}
&DR_{\beta\delta} \\
&= \frac{1}{2}\nabla_\alpha(\nabla_\beta h^{\alpha}_{\delta} + \nabla_\delta h^{\alpha}_{\beta} - \nabla^{\alpha} h_{\beta\delta}) - \frac{1}{2}\nabla_\delta(\nabla_\alpha h^{\alpha}_{\beta} + \nabla_\beta h^{\alpha}_{\alpha} - \nabla^{\alpha} h_{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\nabla_\beta h^{\alpha}_{\delta} + \nabla_\alpha\nabla_\delta h^{\alpha}_{\beta} - \nabla_\alpha\nabla^{\alpha} h_{\beta\delta} - \nabla_\delta\nabla_\beta(\mathrm{tr}_g h))
\end{aligned}
$$

従って、

$$
\begin{aligned}
DR &= D(g^{\beta\delta} R_{\beta\delta}) \\
&= -h^{\beta\delta} R_{\beta\delta} + g^{\beta\delta} DR_{\beta\delta} \\
&= -h^{\beta\delta} R_{\beta\delta} + \delta_g\delta_g h - \Delta_g(\mathrm{tr}_g h)
\end{aligned}
$$

となる。M は２次元であるから、$h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}(\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}R\mathrm{tr}_g h$ となるが、$R(g_0) \equiv -1$ であるから、求める公式が得られる。

[Q9] [The proper action of $\mathcal{D}_0$ on $\mathcal{M}_{-1}$]

定理. $\mathcal{D}^{s+1}$ の $\mathcal{M}^s$ への作用は、*proper* である。すなわち、もし

$$f_n^* g_n \xrightarrow{H^s} \hat{g} \quad \text{かつ} \quad g_n \xrightarrow{H^s} g \qquad (g_n \in \mathcal{M}^s, \quad f_n \in \mathcal{D}^{s+1})$$

ならば、(f_n) の部分列 (f_k) で、ある $f \in \mathcal{D}^{s+1}$ に H^{s+1}-収束するものが存在する。

[証明] $\hat{g}_n = f_n^* g_n$ とおく。$s > 3$ としていたから、ソボレフの埋め込み定理より、H^s-収束は C^2-収束を意味する。C^2-収束ということは、２回までの微分がコンパクト集合上で一様収束するということであるから、従って、

$$\hat{g}_n \xrightarrow{C^2} \hat{g}, \qquad g_n \xrightarrow{C^2} g$$

である。いま、$\hat{e}_n, \hat{e}, e_n, e$ を、それぞれ、$\hat{g}_n, \hat{g}, g_n, g$ に関する、ある与えられた点における、指数写像とする。同様に、それぞれに対応する Christoffel 記号を、${}_n\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}, {}_n\Gamma, \Gamma$ で表す。Christoffel 記号は、計量の１階微分を含むから、

$${}_n\hat{\Gamma} \xrightarrow{C^1} \hat{\Gamma}, \qquad {}_n\Gamma \xrightarrow{C^1} \Gamma$$

を得る。指数写像は、Christoffel 記号を係数とする常微分方程式の解であるから、常微分方程式の一般論より、

$$\hat{e}_n \xrightarrow{C^1} \hat{e}, \qquad e_n \xrightarrow{C^1} e$$

が得られる。また、$\hat{e}_n, \hat{e}, e_n, e$ は local diffeomorphism であるから、やはり次を得る：

$$\hat{e}_n^{-1} \xrightarrow{C^1} \hat{e}^{-1}, \qquad e_n^{-1} \xrightarrow{C^1} e^{-1}$$

ここで、$\varepsilon, \hat{\varepsilon}$ を、それぞれ、半径$< \varepsilon, < \hat{\varepsilon}$ の任意のボールが、$g, \hat{g}$ に関する標準座標系に含まれるように十分小さくとる。必要なら、$\varepsilon, \hat{\varepsilon}$ をさらに小さくとり、また、部分列をとることにより、g_n、$\hat{g}_n$ についても同様の性質をもつとしてよい。いま、δ □ $\frac{1}{2}\min(\varepsilon, \hat{\varepsilon})$ をみたす正数 δ をとり、任意の点 p を中心とする半径 $< \delta$ のボールに含まれる開近傍 U の有限個の集合で M を覆っておく。（M はコンパクトであるから、これは可能である。）すなわち、どの計量に関しても、点 p のまわりの標準座標系を、U 上で用いることができる。T_pM の $\hat{g}$-正規直交基底　V_i　$(i = 1, 2)$ を選ぶ。すなわち、$\hat{g}(p)(V_i, V_j) = \delta_{ij}$。このとき、

$$\begin{aligned} &(1) \quad f_k(p) \longrightarrow q \\ &(2) \quad Df_k(p)V_i \longrightarrow W_i \end{aligned}$$

が成り立つ。(1) は、M がコンパクトであるから自明であり、また、(2) について：

$$\begin{aligned} g_k(f_k(p))(Df_k(p)V_i, Df_k(p)V_j) &= (f_k^* g_k)(p)(V_i, V_j) \\ &\longrightarrow \hat{g}(p)(V_i, V_j) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

より、左辺はある定数で上から抑えられるが、$g_k \longrightarrow g$ （M 上で一様収束）、$f_k(p) \longrightarrow q$ （(1) より）であるから、$Df_k(p)V_i$ は有界である。したがって、必要なら、さらに部分列をとることにより、(2) が成り立つことがわかる。このとき、W_1, W_2 は T_qM の g-正規直交基底である。任意の $q \in U$ は、点 p における指数写像により、

$$q = \hat{e}(\sum_i a^i V_i) = \hat{e}_k(\sum_i a_k^i V_i)$$

と表せる。十分大きい k にたいして、$\sum_i a_k^i(q)V_i = \hat{e}_k^{-1}\hat{e}(\sum_i a^i(q)V_i)$ を得るから、したがって、

$$a_k^i \xrightarrow{C^1} a^i$$

がわかる。ここで、$q = \hat{e}(\sum_i a^i V_i)$ にたいして、$f(q) = e(\sum_i a^i W_i)$ と定める。すると、

$$\begin{aligned} f_k(q) &= f_k \hat{e}_k(\sum_i a_k^i V_i) \\ &= e_k(\sum_i a_k^i Df_k(p)V_i) \longrightarrow f(q) \end{aligned}$$

となる。従って、次が得られた：

$$f_k \xrightarrow{C^1} f \qquad \text{on} \quad U$$

f_k は M 上で定義されているので、f も（その定義から）M 上で well-defined になる。線形同型写像 $L : T_pM \ni V_i \to W_i \in T_qM$ を用いると、U 上で $f = e \circ L \circ \hat{e}^{-1}$ となっていることが確かめられる。従って、f は local diffeomorphism であり、とくに、$f(M)$ は M の開部分集合である。しかし、M のコンパクト部分集合でもあるので、閉集合であることがわかり、結局、f は surjective である。f が injective でもあることを示すために、$f : (M, \hat{g}) \longrightarrow (M, g)$ が等長変換（isometry）であることを示そう：

$$\hat{\rho}(p, q) = \lim \hat{\rho}_k(p, q) = \lim \rho_k(f_k(p), f_k(q)) = \rho(f(p), f(q))$$

（$\rho, \hat{\rho}$ は、それぞれ、$g, \hat{g}$ に関する距離関数である）より、主張が得られる。あとは、いまのところ C^1-収束までわかったから、実際、H^{s+1}-収束であることを示せばよい。ここで、${}_k\Gamma$ と ${}_k\hat{\Gamma}$ の変換公式より、

$$\frac{\partial^2 f_k^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} = -\frac{\partial f_k^\mu \partial f_k^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} {}_k\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + {}_k\Gamma^\tau_{\rho\sigma} \frac{\partial f_k^\lambda}{\partial x^\tau} \tag{9.1}$$

（アインシュタインの和の規約を用いている）が得られるが、(9.1) の右辺は、C^0-収束するので、左辺も C^0-収束する。従って、f_k は C^2-収束することがわかる。さらに、もう一度 (9.1) を用いることにより（右辺が C^1-収束することから）、f_k は C^3-収束することがわかる。特に、f_k は f に H^3-収束する。そこで、いま、3 □ t □ s をみたすある t にたいして

f_k は f に H^t-収束したとして、H^{t+1}-収束が得られることを示そう。${}_k\hat{\Gamma}$ は $\hat{\Gamma}$ に H^{t-1}-収束し、${}_k\Gamma$ は Γ に H^{t-1}-収束（実際、仮定より、H^{s-1}-収束）する。また、$\frac{\partial f_k^\mu}{\partial x^\sigma}$ も $\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\sigma}$ に H^{t-1}-収束するので、(9.1) の右辺は、H^{t-1}-収束する（$s > 1, H^s \ni f, g$ ならば $fg \in H^s$ であった）。従って、(9.1) より、f_k は f に H^{t+1}-収束する。これを $t = s$ まで繰り返すことにより、f_k が f に H^{s+1}-収束することがわかる。 [終]

(9.1) で、$f_k, {}_k\Gamma, {}_k\hat{\Gamma}$ を $f, \Gamma, \hat{\Gamma}$ で置き換えることにより、$g \in C^\infty, \hat{g} \in C^\infty, f \in \mathcal{D}^{s+1}$ ならば、実際、$f \in C^\infty$、すなわち、$f \in \mathcal{D}$ であることがわかるので、次の定理も得られる：

定理. $\mathcal{D}$ は $\mathcal{M}$ に proper に作用する。

[Q10] 共系座標系を用いれば、$\mathrm{tr}_g h = \delta_g h = 0$ という条件は、$\sum_i h_{ii} = \sum_i \nabla_i h_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2)$ と表せる。$\xi(z) = h_{11} - \sqrt{-1}h_{12}$ とおくと、$h_{ij} = h_{ji}$ を考慮して、

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}(h_{11} - \sqrt{-1}h_{12}) &= \nabla_1 h_{11} + \sqrt{-1}\nabla_2 h_{11} - \sqrt{-1}\nabla_1 h_{12} + \nabla_2 h_{12} \\ &= \sum_i \nabla_i h_{i1} + \sqrt{-1}(\nabla_2 h_{11} - \nabla_1 h_{12}) \\ &= \sum_i \nabla_i (h_{i1} - \sqrt{-1}h_{i2}) = 0\end{aligned}$$

従って、$\xi(z)$ は正則関数である。

[Q11] [R.Schoen-S.T.Yau, J.H.Sampson の Harmonic diffeomorphism の存在証明]

$R(G) \square 0$ とし、$S : (M, g) \longrightarrow (M, G)$ を J.Eells-H.Sampson の定理から得られる、恒等写像（Identity map）にホモトピックな harmonic map とする。S が向きを保つ diffeomorphism であることを示す。双方のリーマン計量を $g = \lambda dz d\bar{z}, G = \rho dw d\overline{w}$ と表しておく。$H = |\partial S^{1,0}|^2, \quad L = |\overline{\partial} S^{1,0}|^2$ とおく。$L \equiv 0$ のとき、S は正則写像であり、$H \equiv 0$ のとき、S は反正則写像である。Harmonic map の方程式より、$\partial S^{1,0}$ は、$T^*M^{1,0} \otimes TM^{1,0}$ の正則切断である。（任意の正則切断 ξ は $\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\xi = 0$ により特徴づけられる正則構造を $V = T^*M^{1,0} \otimes TM^{1,0}$ に導入できる。これを Koszul-Malgrange の正則構造と呼ぶ。V は、実際、M 上の自明束である。） このことから、M のある開集合上で $L \equiv 0$ とすると、一致の定理から、M 全体で $L \equiv 0$ となる。H についても同様である。これより、L が恒等的に 0 でないならば、L の零点集合は M の閉集合である。しかるに、L の零点集合は、二つの方程式（コーシー＝リーマン方程式）で定義されるので、余次元は二つ下がらなければならない。M の次元は 2 であり、M はコンパクトであるから、結局、L の零点集合は、有限個の孤立点からなることがわかる。H についても同様である。いま、K_1, K_2 を、それぞれ、g, G の Gauss 曲率とすると、

$$\begin{aligned}K_1 &= -\frac{2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\log\lambda \\ K_2 &= -\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\log\rho = \frac{1}{2}R(G) \square 0\end{aligned}$$

補題 1. *H または L の零点以外の点において次が成り立つ：*

$$\Delta_g \log H = 2K_1 - 2K_2(H-L)$$
$$\Delta_g \log L = 2K_1 + 2K_2(H-L)$$

従って、特に $\Delta_g \log(H/L) = -4K_2(H-L)$ が成り立つ。

[証明] S が harmonic map であることは、$\nabla_{\partial/\partial\bar{z}} \frac{\partial S}{\partial z} = 0$ と同値である。これと Ricci identity より得られる。g の曲率テンソルを R とすると、$g(R(\partial/\partial z, \partial/\partial\overline{z})\partial/\partial z, \partial/\partial\overline{z}) = \frac{1}{2}K_1$ であることに注意。 [終]

ここで、$J(S) = H - L$ とおく。もし、$H \equiv 0$ ならば、$J(S)$ □ 0 となるが、$z = x + \sqrt{-1}y, w = u_1 + \sqrt{-1}u_2$ とおき、

$$dS = \sum_{i=1}^{2}(S_x^i dx \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} + S_y^i dy \otimes \frac{\partial}{\partial u_i})$$

と表すと、簡単な計算により、$J(S) = \frac{\rho}{\lambda}\det\begin{pmatrix} S_x^1 & S_y^1 \\ S_x^2 & S_y^2 \end{pmatrix}$ であることがわかるので、deg$S$ □ 0 となってしまう。ところが、S は恒等写像にホモトピックであったから、deg$S = 1$ でなければならず、これは矛盾である。ゆえに、H は恒等的にゼロではないから、その零点集合は有限個の孤立点からなる。（正則写像の写像度は正の整数であり、反正則写像の写像度は負の整数である事実からもわかる。）いま、p_i を H の零点とし、$\{z_i\}$ を点 p_i を中心とする正則座標系とすると、点 p_i の近傍で、$\partial S^{1,0} = z_i^{k_i}\eta$ と表せる。ここで、k_i は $\partial S^{1,0}$ の零点の位数であり、η は点 p_i の近傍で零にならない（V の）正則切断である。D_i を点 p_i を中心とする半径 ρ_i の Disc とするとき、

$$\begin{aligned}\int_{M-\cup_i D_i} \Delta \log H d\mu_g &= 2\sum_i \mathrm{Re}\{\int_{\partial D_i} \sqrt{-1}\partial \log H\} \\ &= 2\sum_i \mathrm{Re}\{-2\pi k_i + o(\rho_i)\} \\ &\longrightarrow -4\pi \sum_i k_i \quad \text{as} \quad \mathrm{Max}_i \rho_i \to 0\end{aligned}$$

が成り立つので、補題 1 とから次を得る：

$$-4\pi\sum_i k_i = 2\int_M K_1 d\mu_g - 2\int_M K_2(H-L)d\mu_g \tag{11.1}$$

補題 2. *恒等写像にホモトピックな harmonic map S にたいして、$H > 0$ が M 上で成り立つ。*

[証明] Gauss-Bonnet の定理より、(11.1) の右辺の第一項は、

$$2\int_M K_1 d\mu_g = 4\pi\mathcal{X}(M)$$

となる。ここに、$\mathcal{X}(M)$ は M のオイラー数である。ここで、$\mathrm{deg}S = 1$ であることにより、

$$\begin{aligned} \int_M K_2(H-L)d\mu_g &= \int_M K_2 J(S) d\mu_g \\ &= \int_M K_2 d\mu_G = 2\pi\mathcal{X}(M) \end{aligned}$$

となるので、(11.1) により、$\sum_i k_i = 0$ を得る。従って、H の零点はないので、M 上いたるところ、$H > 0$ である。 [終]

補題 **3.** $K_2 \square 0$ ならば $J(S) = H - L \geq 0$ が成り立つ。

[証明] $R = \{x \in M \mid J(S)(x) < 0\}$ とおく。補題 2 により、R 上で、$L > H > 0$ である。従って、$\log(H/L) < 0$。さらに、補題 1 より、$\Delta_g \log(H/L) = -4K_2(H-L) \square 0$ が $\overline{R}$ 上で成り立つ。ここに、$\overline{R} = \{x \in M \mid J(S)(x) \square 0\}$ である。よって、$\log(H/L)$ は R 上で優調和関数（superharmonic function）である。ラプラシアンにたいする最大値の原理から、$\log(H/L)$ は $\overline{R}$ の内点で非正の最小値を持ち得ない。しかるに、$\overline{R}$ の境界で $\log(H/L) = 0$ であり、その内点では $\log(H/L) < 0$ であるから、R は空集合でなければならない。 [終]

定理**.** $S : (M, g) \longrightarrow (M, G)$ を恒等写像にホモトピックな *harmonic map* で、さらに、$K_2 \square 0$ であるとする。このとき、S は向きを保つ *diffeomorphism* である。

[証明] 補題 2 と 3 より、M 上で $H > 0$ かつ $J(S) \geq 0$ が成り立っている。いま、点 x において、$J(S)(x) = 0$ であるとすると、$H(x) = L(x) > 0$ である。従って、再び、補題 1 と 2 より、

$$\Delta_g \log(H/L) = -4K_2(H-L) = -4K_2 J(S)$$

が点 x のある開近傍 U 上で成り立つ。（U 上 $L > 0$。）$J(S) \geq 0, K_2 \square 0$ であるから、U 上である正の定数 c_1 があって、$-4K_2 L \square c_1$ とできる。また、$x \geq 1$ のとき $\log x \geq x - 1$ であることから、ある正の定数 c_2 を選んで、U 上で

$$-4K_2 J(S) \square c_1(H/L - 1) \square c_2 \log(H/L)$$

が成り立つようにできる。以上より、U 上で

$$\Delta_g \log(H/L) \square c_2 \log(H/L)$$

が成り立ち、かつ、$\log(H/L) \geq 0$ であるから、Strong Maximum principle (cf. 定理 8.19,"Elliptic Partial Differential equations of Second Order", D.Gilbarg and N.Trudinger) より、$\log(H/L)$ は U 上で定数。しかるに、$\log(H/L)(x) = 0$ であったから、結局、U 上で $\log(H/L) = 0$ が成り立つ。これより、$J(S)(x) = 0$ をみたす点 x の集合は閉集合かつ開集合となるので、U は空集合であるか $U = M$ であるかのどちらかである。後者の場合、$J(S) \equiv 0$ となり、$\mathrm{deg}S = 0$ となってしまい、S が恒等写像にホモトピックであることに

反する。従って、$J(S) > 0$ が M 上で成り立つから、S は向きを保つ diffeomorphism である。 [終]

[Q12] [Harmonic map の一意性]

$R(G) < 0$ とし、$S_0, S_1 : (M, g) \longrightarrow (M, G)$ を Eells-Sampson の定理から得られる、恒等写像にホモトピックな二つの harmonic maps とする。このとき、$S_0 = S_1$ であることを示す。C^∞-ホモトピー $F : M \times I \longrightarrow M$ で、$F(\cdot, 0) = S_0(\cdot), F(\cdot, 1) = S_1(\cdot)$ となるものが存在する。いま、$S_0(x) \neq S_1(x)$ となるかってな点 $x \in M$ をとり固定したとき、$\gamma(x, 0) = S_0(x), \gamma(x, 1) = S_1(x)$ となる測地線 $t \to \gamma(x, t)$ が一意的に存在する。(cf. "Morse theory", J.Milnor、これから証明する定理の一次元版と考えればよい。一意なのは、やはり、曲率が負であるからである。Hartman の結果は、値域の多様体は２次元以上のコンパクト負曲率リーマン多様体でよいが、ここでは、２次元に限って証明する。)

さて、測地線 γ のパラメーター t を弧長パラメーターにとる。すると、$\|\frac{\partial \gamma}{\partial t}\| = 1$ であり、非負数 $\tau(x)$ が一意的に存在して、$\gamma(x, 0) = S_0(x), \gamma(x, \tau(x)) = S_1(x)$ となっている。$S_0(x) = S_1(x)$ のときは、$\tau(x) = 0$ とする。τ は連続関数であり、$\exp_x : T_xM \longrightarrow M$ が local diffeomorphism であることから、$\tau > 0$ なるところでは C^∞ である。(M の開集合上で $S_0 = S_1$ ならば、M 全体で $S_0 = S_1$ となる (H.Sampson)。) いま、$\{x \mid \tau(x) > 0\}$ が空集合でないとしたとき、$\|\frac{\partial \gamma(x)}{\partial t}\|^2 = 1$ のラプラシアンをとると、

$$
\begin{aligned}
(12.1) \qquad 0 &= \frac{1}{2}\Delta_g \|\frac{\partial \gamma}{\partial t}\|^2 \\
&= \sum_l \lambda^{-1}\big(\|\nabla_l \frac{\partial \gamma}{\partial t}\|^2 + < \nabla_l \nabla_l \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} > \big) \\
&= \sum_l \lambda^{-1}\big(\|\nabla_l \frac{\partial \gamma}{\partial t}\|^2 + < \nabla_t \nabla_l \frac{\partial \gamma}{\partial x^l} + R(\frac{\partial \gamma}{\partial x^l}, \frac{\partial \gamma}{\partial t})\frac{\partial \gamma}{\partial x^l}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} > \big) \\
&= \sum_l \lambda^{-1}\big(\|\nabla_l \frac{\partial \gamma}{\partial t}\|^2 + \frac{d}{dt} < \Delta\gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} > - < R(\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial x^l})\frac{\partial \gamma}{\partial x^l}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} > \big)
\end{aligned}
$$

を得る。

補題 **1.** $\{x \mid \tau(x) > 0\}$ 上で、$(\Delta_g \tau)(x) \geq 0$ が成り立つ。

[証明] $\gamma(x, 0) = S_0(x), \gamma(x, \tau(x)) = S_1(x), (\Delta\gamma)(x, 0) = \Delta S_0(x) = 0$ が成り立っている。さらに、

$$
\begin{aligned}
0 = \lambda \Delta S_1(x) &= \sum_l \nabla_l^{S_1} \frac{\partial S_1}{\partial x^l} \\
&= \sum_l \nabla_l^{S_1} \big(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial x^l} + \frac{\partial \gamma}{\partial x^l}\big) \\
&= \sum_l \big(\nabla_t \frac{\partial \gamma}{\partial t} \cdot (\frac{\partial \tau}{\partial x^l})^2 + 2\nabla_l \frac{\partial \gamma}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x^l} + \frac{\partial \gamma}{\partial t}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^l \partial x^l} + \nabla_l \frac{\partial \gamma}{\partial x^l}\big)
\end{aligned}
$$

であるが、γ は測地線であるから、$\nabla_t \frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0$ より、次を得る：

$$(\Delta\gamma)(x,\tau(x)) = -\lambda^{-1}\sum_l (2\nabla_l \frac{\partial\gamma}{\partial t}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial x^l} + \frac{\partial\gamma}{\partial t}\frac{\partial^2\tau}{\partial x^l\partial x^l}) \tag{12.2}$$

ここで、(12.1) を $[0,\tau(x)]$ で積分すれば、

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau(x)}\sum_l \|\nabla_l \frac{\partial\gamma}{\partial t}\|^2 dt + &< \Delta\gamma(x,\tau(x)), \frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,\tau(x)) > \\ &- < \Delta\gamma(x,0), \frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,0) > - \int_0^{\tau(x)}\sum_l < R(\frac{\partial\gamma}{\partial t},\frac{\partial\gamma}{\partial x^l})\frac{\partial\gamma}{\partial x^l},\frac{\partial\gamma}{\partial t} > dt \equiv 0\end{aligned} \tag{12.3}$$

を得るが、(12.2) と $\|\frac{\partial\gamma}{\partial t}\|^2 = 1$ より、

$$\begin{aligned}< \Delta\gamma(x,\tau(x)), \frac{\partial\gamma}{\partial t} > &= -\lambda^{-1}\sum_l \big(< 2\nabla_l\frac{\partial\gamma}{\partial t},\frac{\partial\gamma}{\partial t} > \frac{\partial\tau}{\partial x^l} + \|\frac{\partial\gamma}{\partial t}\|^2\frac{\partial^2\tau}{\partial x^l\partial x^l}\big) \\ &= -\Delta_g\tau\end{aligned}$$

であるから、(12.3) より次を得る：

$$\Delta_g\tau = \int_0^{\tau(x)}\lambda^{-1}\sum_l \big(\|\nabla_l\frac{\partial\gamma}{\partial t}\|^2 dt - < R(\frac{\partial\gamma}{\partial t},\frac{\partial\gamma}{\partial x^l})\frac{\partial\gamma}{\partial x^l},\frac{\partial\gamma}{\partial t} > \big)dt \geq 0 \tag{12.4}$$

[終]

さて、U を $\{x \mid \tau(x) > 0\}$ の連結成分とする。$U \neq M$ と仮定する。すると、U 上で、$\tau > 0$ かつ $\Delta_g\tau \geq 0$ が成り立っているから、最大値の原理から、τ は内点で正の最大値をとらないが、∂U 上では $\tau = 0$ であるから、結局、U 上で $\tau = 0$ となり、従って、M 全体で $\tau = 0$ である。このとき、$S_0 = S_1$ である。次に、M 全体で $\tau(x) > 0$ であるとすると、補題 1 により τ は M 上の positive subharmonic function であるから、τ は M 上で定数であることがわかる。いま、$\tau = c > 0$ とすると、(12.4) より、すべての $x \in M$ において、

$$0 = \Delta_g\tau = \int_0^c \lambda^{-1}\sum_l \big(\|\nabla_l\frac{\partial\gamma}{\partial t}\|^2 - < R(\frac{\partial\gamma}{\partial t},\frac{\partial\gamma}{\partial x^l})\frac{\partial\gamma}{\partial x^l},\frac{\partial\gamma}{\partial t} > \big)dt$$

が成り立つが、$R(G) < 0$ より、$\frac{\partial\gamma}{\partial t}\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial x^l} = 0, \quad (l = 1,2)$ を得る。γ は恒等写像にホモトピックであるから、ある点 $x_0 \in M$ において $\frac{\partial\gamma}{\partial x^1}\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial x^2} \neq 0$ となるので、その点において $\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x_0) = 0$ となる。しかるに、これは $\|\frac{\partial\gamma}{\partial t}\|^2 = 1$ （任意の点 $x \in M$) に反する。従って、$M = U$ という場合はないので、以上より、$S_0 = S_1$ であることが示された。

[Q13] [Smooth dependence $g \to S(g)$ の証明]

以下では、$k = 2,3, p > 2$ とする。$L_k^p(M,\mathbf{R}^n)$ を、M から n 次元ユークリッド空間への写像で、（distribution の意味で）k-回までのすべての偏微分が L^p （p 乗可積分）に属す

るもの全体のなす空間とする。M が２次元の場合、ソボレフの埋め込み定理より、$k-\frac{2}{p}>l$ ならば コンパクトな埋め込み $L_k^p(M,\mathbf{R}^n)\subset C^l(M,\mathbf{R}^n)$ がある。例えば、 $k=2, p>2$ ならば、$f\in L_k^p(M,\mathbf{R}^n)$ は $f\in C^1(M,\mathbf{R}^n)$ となる。Harmonic map S の場合、$S\in L_3^p$ がいえれば、S は C^∞ であることが示される。この事実は、Eells-Sampson の存在定理の証明において用いられている。さて、M は十分おおきな n にたいして、$\mathbf{R}^n$ の部分多様体であるとしてよい（Nash の埋め込み定理）。そこで、$L_k^p(M,M)$ を $L_k^p(M,\mathbf{R}^n)$ の元で、M を M に写すもの全体のなす空間とする。$L_k^p(M,M)$ は $L_k^p(M,\mathbf{R}^n)$ の C^∞ 部分多様体であることが知られている（cf. "Foundations of Global Non-Linear Analysis", R.Palais）。そこで、$L_k^p(M,M)$ の点 $u\in L_k^p(M,M)$ における接空間を、

$$T_uL_k^p(M,M)=\{\beta\in L_k^p(M,\mathbf{R}^n)\mid \beta_x\in T_{u(x)}M \quad \text{for} \quad \text{all} \quad x\in M\}$$

で定める。β は u に沿った L_k^p-ベクトル場である。いま、$\beta\in T_uL_k^p(M,M)$ にたいして、

$$\mathcal{E}_u(\beta)=\Delta\beta+\sum_l \lambda^{-1}R(\beta,\frac{\partial u}{\partial x^l})\frac{\partial u}{\partial x^l}, \qquad g_{ij}=\lambda\delta_{ij} \tag{13.1}$$

とおく。Δ は M の線形ラプラシアンである。$\mathcal{E}_u$ は、$u\in L_k^p(M,M)$ に沿う L_k^p-ベクトル場を $u\in L_k^p(M,M)$ に沿う L_{k-2}^p-ベクトル場に写す。さらに、$\mathcal{E}_u$ は、２階の線形 self-adjoint 作用素であるから、Fredholm alternative が成り立つ（cf. 定理 5.3、Gilbarg-Trudinger）。すなわち、$\mathcal{E}_u$ が injective であることと surjective であることは同値である。例えば、$\mathcal{E}_u$ が isomorphism であることを示すには、injective か surjective のどちらかを示せばよい。

補題 **1.** 恒等写像にホモトピックな u にたいして、写像 $\beta\longrightarrow\mathcal{E}_u(\beta)$ は u に沿う L_k^p-ベクトル場全体から L_{k-2}^p- ベクトル場全体への *isomorphism* である。

[証明] $\mathcal{E}_u(\beta)=0$ ならば $\beta=0$ を示せばよい。そこで、$\mathcal{E}_u(\beta)=0$ と仮定する。特に、$\int_M <\mathcal{E}_u(\beta),\beta> d\mu_g=0$ であるから、(13.1) と部分積分法および $R(G)<0$ より、次を得る：

$$\begin{cases} <R(\beta,\frac{\partial u}{\partial x^l})\frac{\partial u}{\partial x^l},\beta>=0 \quad , \\ \qquad\qquad\qquad \nabla_l\beta=0 \quad , \qquad (l=1,2) \end{cases}$$

ここで、前に述べたように u は C^1-級であり、恒等写像にホモトピックであるから、$\deg(u)=1$ が成り立つ。すなわち、ある点 $x\in M$ において、 $Du(x)$ は isomorphism になっている。$R(G)<0$ であるから、上出の最初の式より $\beta_x=0$ であるが、二番目の式より、$p\to\|\beta_p\|^2_{\mathbf{R}^n}$ は定数値関数であるから、$\beta=0$ を得る。 [終]

以下、$k=3$ の場合に限ることにする。さて、特に $L_3^p(M,M)$ 上のベクトル場 β を次で定める：

$$\beta(u)=\mathcal{E}_u^{-1}\Delta u \qquad \text{for} \quad u\in L_3^p(M,M) \tag{13.2}$$

対応 $u\to\mathcal{E}_u$ および $u\to\Delta u$ は C^∞ であるから、対応 $u\to\beta(u)$ も C^∞ である。補題 1 により、$\beta(u)=0$ であるための必要十分条件は、u が (C^2-) harmonic map であることである。

補題 **2.** もし、$S \in L_3^p(M,M)$ が *harmonic map* ならば、点 S における u の *Fréchet* 微分 $D\beta(S)$ は、$T_S L_3^p(M,M)$ の *isomorphism* （実際、*identity isomorphism*）である。

[証明] 仮定より、$\beta(S)=0$ である。(13.2) 式より、$\mathcal{E}_u(\beta(u))=\Delta u$ であるから、この両辺の変分をとり、$u=S$ とする。変分の方向を $h \in T_S L_3^p(M,M)$ とすると、右辺の変分は、harmonic map の第二変分公式に等しいから、

$$D(\Delta u)(S)h = \Delta h + \lambda^{-1}\sum_l R(h, \frac{\partial S}{\partial x^l})\frac{\partial S}{\partial x^l}$$

である。また、左辺の変分は、(13.1) 式と $\beta(S)=0$ を用いると、

$$D(\mathcal{E}_u(\beta(u)))(S)h = \Delta D\beta(S)h + \lambda^{-1}\sum_l R(D\beta(S)h, \frac{\partial S}{\partial x^l})\frac{\partial S}{\partial x^l}$$

となる。従って、次を得る：

$$\Delta D\beta(S)h + \lambda^{-1}\sum_l R(D\beta(S)h, \frac{\partial S}{\partial x^l})\frac{\partial S}{\partial x^l} = \Delta h + \lambda^{-1}\sum_l R(h, \frac{\partial S}{\partial x^l})\frac{\partial S}{\partial x^l}$$

ここで、$\varphi = D\beta(S)h - h$ とおくと、上記の式から、

$$\Delta\varphi + \lambda^{-1}\sum_l R(\varphi, \frac{\partial S}{\partial x^l})\frac{\partial S}{\partial x^l} = 0$$

となるが、φ と内積をとり M 上で積分することにより、$\varphi \equiv 0$ （cf. 補題 1 の証明）が得られるから、$D\beta(S)h = h$ であることがわかる。 [終]

定理**.** $R(G)<0$ とし、$S(g):(M,g) \longrightarrow (M,G)$ を *Eells-Sampson* の定理と *Hartman* の定理から得られる、恒等写像にホモトピックな *unique harmonic map* とする。このとき、対応 $g \to S(g)$ は C^∞ である。

[証明] (13.2) 式で定義される $\beta(u)$ は、実際、g にも G にも C^∞ に依存する。いま、G を固定したとき、$\beta(u)$ は、u と g の両方に C^∞ に依存するので、$\beta(g,u)=\beta(u)$ と表すことにする。接束（tangent bundle）$TL_3^p(M,M)$ の、点 S のまわりの局所座標系を用いて、$\beta(g,u)=(u, Y(g,u))$ と表せる。ここで、$Y(g,u)$ は、W を $L_3^p(M,M)$ の o の近傍（o は S に対応する）としたとき、$\mathcal{M}\times W$ から $T_S L_3^p(M,M)$ への C^∞ 写像である。$S(g):(M,g)\longrightarrow (M,G)$ を harmonic map とすると、($\beta(g,S)=0$ より）$Y(g,o)=0$ であり、また、補題 2 により、$D_u Y(g,o): T_S L_3^p(M,M) \longrightarrow T_S L_3^p(M,M)$ は isomorphism である。従って、バナッハ空間における陰関数定理より、ある近傍 $W' \subset W$ と g の $\mathcal{M}$ における近傍 $\mathcal{S}$ が存在して、任意の $g' \in \mathcal{S}$ にたいして、$W' \times \mathcal{S}$ 上で、$Y(g', S(g'))=0$ が成り立つ。すなわち、$\beta(g', S(g'))=0$ より、$S(g')=0$ であるから、harmonic map $S(g)$ は g に C^∞ に依存することが示された。 [終]

[Q14] $\zeta_{ij} =< \frac{\partial S}{\partial x^i}, \frac{\partial S}{\partial x^j} >$ とおき、$\mathrm{Re}(\xi(z)dz^2) = \rho_{11}dx^2 + 2\rho_{12}dxdy + \rho_{22}dy^2$ とおくとき、$\xi(z) =< \frac{\partial S}{\partial z}, \frac{\partial S}{\partial z} >$ であることから、

$$\rho_{11} = \zeta_{11} - \zeta_{22}, \quad \rho_{12} = 2\zeta_{12}, \quad \rho_{22} = -\rho_{11}$$

が成り立っている。このとき、共形座標系を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}
&\int_M \sum_{i,j,l} g^{lj}(h^T)^i_l < \frac{\partial S}{\partial x^i}, \frac{\partial S}{\partial x^j} > d\mu_g \\
&= \int_M ((h^T)^{11}\zeta_{11} + 2(h^T)^{12}\zeta_{12} + (h^T)^{22}\zeta_{22})dxdy \\
&= \int_M ((h^T)^{11}(\zeta_{11} - \zeta_{22}) + 2(h^T)^{12}\zeta_{12})dxdy \\
&= \int_M ((h^T)^{11}\rho_{11} + (h^T)^{12}\rho_{12})dxdy \\
&= \frac{1}{2} << \mathrm{Re}(\xi(z)dz^2), h^T >>
\end{aligned}$$

ここに、$h^T = h - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g h)I$ であり、h の traceless part である。

[Q15] [$W(h) = DS(g_0)h = 0 \quad$ (h は $\mathrm{tr}_{g_0} h = 0, \delta_{g_0} h = 0$ をみたす任意の (1,1)-tensor) の証明]

まず、harmonic map の方程式を書くと、

$$(15.1) \quad \sum_{i,j} g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k {}_g\Gamma^k_{ij}\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^k} + \sum_{\beta,\gamma} {}_{g_0}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial S^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial S^\gamma}{\partial x^j}\Big) = 0 \quad , \qquad (\alpha = 1, 2)$$

方程式 (15.1) を g に関して偏微分して、$g = g_0$ としてみよう。$g = g_0$ のとき、S は恒等写像になる。（恒等写像が harmonic map になることは (15.1) より直接にわかる。さらに、S は恒等写像にホモトピックであり、各ホモトピー類のなかで harmonic map は unique に存在したから、結局、S は恒等写像に一致することがわかる。）さて、(15.1) の左辺の括弧のなかを $K(g, S)_{ij}$ と表すと、$K(g_0, id)_{ij} = 0$ が任意の i, j に対して成り立つ。従って、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial g}\Big(\sum_{i,j} g^{ij}K(g,S)_{ij}\Big) \,|_{g=g_0, S=id} \\
&= \sum_{i,j}\Big(- h^{ij}K(g_0, id)_{ij} + g_0^{ij}\frac{\partial}{\partial g}K(g,S)_{ij} \,|_{g=g_0,S=id}\Big) \\
&= \sum_{i,j} g_0^{ij}(-\frac{\partial}{\partial g}({}_g\Gamma^\alpha_{ij}) \,|_{g=g_0})
\end{aligned}$$

ここで、共形座標系を用いて $g_0 = (\lambda\delta_{ij})$ と表すと、$g = g_0$ のとき

$$\begin{aligned}
{}_{g_0}\Gamma^k_{ij} &= \sum_l \frac{1}{2}g^{kl}(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}) \\
&= \frac{1}{2\lambda}(\frac{\partial \lambda}{\partial x^i}\delta_{kj} + \frac{\partial \lambda}{\partial x^j}\delta_{ik} - \frac{\partial \lambda}{\partial x^k}\delta_{ij})
\end{aligned}$$

であるから、特に、次が成り立つ：

$$
{}_{g_0}\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^j} \qquad (i,j=1,2)
$$
$$
\sum_i {}_{g_0}\Gamma^k_{ii} = 0 \quad , \quad {}_{g_0}\Gamma^1_{2j} = -{}_{g_0}\Gamma^2_{1j} \qquad (k,j=1,2)
$$

これらの式より、$\sum_i h_{ii} = 0, \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} h_{ij} = \sum_i \nabla_i h_{ij} = 0 \quad (j=1,2)$ である。従って、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial}{\partial g}({}_g\Gamma^k_{ij}) \mid_{g=g_0} \\
&= \sum_{i,j,l} \lambda^{-1}\delta^{ij}\{-\frac{1}{2}h^{kl}(\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}\delta_{lj} + \frac{\partial\lambda}{\partial x^j}\delta_{il} - \frac{\partial\lambda}{\partial x^l}\delta_{ij}) + \frac{1}{2}\lambda^{-1}\delta^{kl}(\frac{\partial h_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^l})\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

以上より、$\frac{\partial}{\partial g}\sum_{i,j} g^{ij}K(g,S)_{ij} \mid_{g=g_0, S=id} = 0$ である。そこで、$L(g,S) = \sum_{i,j} g^{ij}K(g,S)_{ij}$ とおくと、(15.1) より、

$$
\begin{aligned}
(15.2) \qquad 0 &= \frac{d}{dg}L(g,S(g)) \mid_{g=g_0,S=id} \\
&= \frac{\partial}{\partial g}L(g,S(g)) \mid_{g=g_0,S=id} + \frac{\partial}{\partial S}L(g,S)\cdot DS(g) \mid_{g=g_0,S=id} \\
&= \frac{\partial}{\partial S}L(g,S)\cdot DS(g) \mid_{g=g_0,S=id}
\end{aligned}
$$

が得られるが、ここで、$DS(g_0)h = W$ とおくと、

$$
D^2E_g(id)(W,W) = \int_M \frac{\partial L}{\partial S}(g_0, id)W\cdot W d\mu_{g_0}
$$

であることと、E_g の第二変分公式、および (15.2) より次を得る：

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_M \left(\|\nabla_{\partial/\partial x}W\|^2 + \|\nabla_{\partial/\partial y}W\|^2\right)dxdy \\
&\quad - \int_M g_0(\mathcal{R}(\frac{\partial S}{\partial x}, W)W, \frac{\partial S}{\partial x})dxdy - \int_M g_0(\mathcal{R}(\frac{\partial S}{\partial y}, W)W, \frac{\partial S}{\partial y})dxdy
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathcal{R}$ は (M, g_0) の曲率テンソル（curvature tensor）であるが、いまの場合、$\mathcal{R} < 0$ であるから、結局、

$$
\frac{\partial S}{\partial x}\wedge W = 0 \quad , \qquad \frac{\partial S}{\partial y}\wedge W = 0
$$

を得る。$S = id$ であるから、$\frac{\partial S}{\partial x}$ と $\frac{\partial S}{\partial y}$ はすべての点において一次独立であり、従って、$W = 0$ でなければならない。

[Q16] 便宜上、ガウス曲率が $K_g \equiv -1$ となるように、計量 g を取り直す。（このとき、スカラー曲率は $R \equiv -2$ である。また、長さ l の曲線は長さ $\sqrt{2}l$ の曲線になる。）

Collar 補題. α を (M,g) 上の長さ l の（非自明な）閉測地線とする。このとき、α の M における近傍で U で、次の集合 $T/\sim$ に等長的なものが存在する : $T=\{(r,\theta)\mid 1 \square r \square e^l, \theta_0 \square \theta \square \pi-\theta_0\}$ であり、$\sim$ は $(1,\theta)$ を (e^l,θ) と同一視するものである。さらに、l および θ_0 は、

$$\cot^4\frac{\theta_0}{2} \geq \frac{1+\cosh l}{\sinh l}$$

を満たす。

[証明] 閉測地線の回りに、あるカラー（collar）を付着させること自体は、いつでも可能であるので、ここで、自明でないことは、θ_0 の infimum がみたす不等式である。$\mathbf{H}$ を上半平面とする。$\mathbf{H}$ の i から ie^l までの線分は、ポアンカレ計量 $ds^2=\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$ に関して、($\theta=\pi/2$ であるから) $\int_1^{e^l}\frac{1}{r}dr=l$ であるから、これは M 上の長さ l の閉測地線 α に射影される。$\mathbf{H}$ において虚軸に直交する測地線達は、(それらが一致しない限り) 交点をもたない。従って、θ_0 のとり方から、T に含まれる測地線を M に射影したものも同様の性質を持つ。カラーの境界上では、二つの点 $\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_2$ が M 上の一点 Q に射影されることが起こり得る。$\tilde{P}_1,\tilde{P}_2$ を、それぞれ、$\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_2$ から（測地線に沿って）虚軸に下ろした垂線の足とする。$\tilde{P}_1,\tilde{P}_2$ を、それぞれ、M に射影した点を P_1,P_2 とすると、M 上の測地三角形 $[P_1QP_2]$ を得るが、実は、点 Q では測地線は滑らかにつながっている。なぜなら、π 未満の角をなすとすると、P_1QP_2 と同じホモトピー類のなかで、α 上のより短い線分 $P_{1'},P_{2'}$ で、それぞれの点から Q までの最短測地線をとれば、これらは、やはり α 上で直交しているから、θ_0 のとりかたに反するからである。いま、M に α に沿って切れ目を入れ（これを M' とする）、M' と M' の連結和を考える（P_1 どうし P_2 どうしが一致するように、α の向きが一致するように張り合わせる）。この連結和を $2M$ で表す。そこで、M 上の閉測地線 β を $\beta=P_1QP_2Q'P_1$ で定める。ここで、Q' は、Q に対応する、もうひとつの M' 上の点である。α と β は $2M$ 上の点 P_1 において直交している。さて、$\tilde{\alpha}$ を $\mathbf{H}$ 内の点$\tilde{A}=ie^{-l}$ から点 $\tilde{B}=i$ までの測地線分で、α の lift とする。β の lift $\tilde{\beta}$ は、点 $\tilde{B}$ から点 $\tilde{C}$ までの測地線分とする。このようにして、$2M$ 上の path $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ は、頂点が点 $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D},\tilde{E}$ の測地線分からなる path に lift されるが、これらの頂点はすべて $2M$ 上の一点 P_1 に射影される。いま、直線 $\tilde{A}\tilde{B}$ と直線 $\tilde{C}\tilde{D}$ が点 $\tilde{F}$ で交わったとし、さらに点 $\tilde{F}$ は線分 $\tilde{A}\tilde{B}$ 上にはないと仮定する。点 $P\in 2M$ を任意にとり、(ただし、 P は β 上にはないとする) 点 P から最短測地線 γ に沿って α に垂線を下ろす。α と α^{-1} のどちらに下ろすかは、その垂線の足を $\tilde{G}$ としたとき、$\angle(\tilde{G}\tilde{B},\tilde{G}\tilde{P})$ が正の向きをなしているときは $\tilde{G}$ を $\tilde{A}\tilde{B}$ 上にとり、そうでないときは、$\tilde{G}$ を $\tilde{C}\tilde{D}$ 上にとる。(ここで、$\tilde{X}$ は点 X の lift した点とする。) γ は最短測地線で α と直交するから、β と交わることはない。従って、線分 $\tilde{G}\tilde{P}$ は、直線 $\tilde{B}\tilde{C}$ とも直線 $\tilde{F}\tilde{D}$ とも交わらない。しかも、γ は点 G 以外ではα と交わらない。従って、線分 $\tilde{G}\tilde{P}$ は、直線 $\tilde{A}\tilde{B}$ とも直線 $\tilde{C}\tilde{D}$ とも交わらない。これより、点 $\tilde{P}$ は、四角形 $\tilde{F}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ 内にあることがわかるので、その四角形の射影は M 全体を覆う。しかるに、$2M$ の面積は、明らかに、8π より小さいくなってしまうが、種数 $g\geq 2$ より、$2M$ の面積は（ガウス＝ボンネの定理より） $2\times 4\pi(g-1)\geq 8\pi$ であるから、これは矛盾である。以上より、線分 $\tilde{A}\tilde{B}$

の延長線上で直線 $\tilde{D}\tilde{E}$ は直線 $\tilde{A}\tilde{B}$ と交わることはない。さて、ここで $\mathrm{sinh}l\mathrm{sinh}d < 1$ と仮定する。今度は、直線 $\tilde{C}\tilde{D}$ と線分 $\tilde{A}\tilde{B}$ との交点を $\tilde{F}$ とし、二つの測地三角形 $\Delta\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ と $\Delta\tilde{B}\tilde{D}\tilde{F}$ にたいして、正弦定理、および余弦定理を適用してみよう。一般に、双曲空間形上の測地三角形において、三つの測地辺の長さを a, b, c とし、それらの辺に対応する角を α, β, γ とすれば、正弦定理は、$\mathrm{sinh}a : \mathrm{sinh}b : \mathrm{sinh}c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ であり、余弦定理は、$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\mathrm{cosh}a$、および $\mathrm{cosh}a = \mathrm{cosh}b\mathrm{cosh}c + \mathrm{sinh}b\mathrm{sinh}c\cos\alpha$ で与えられる。そこで、$\tilde{B}\tilde{C} = d, \tilde{B}\tilde{D} = s, \tilde{B}\tilde{F} = l', (\tilde{C}\tilde{D} = l)$ とおき、$\angle(\tilde{C}\tilde{B}\tilde{D}) = \varphi, \angle(\tilde{C}\tilde{D}\tilde{B}) = \psi, \angle(\tilde{B}\tilde{F}\tilde{D}) = \chi, (\angle\tilde{B} = \angle\tilde{C} = \angle\tilde{D} = \pi/2)$ とおくと、次を得る：

$$\begin{aligned}
&\Delta\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}\text{の余弦定理：} && \mathrm{cosh}s = \mathrm{cosh}d\mathrm{cosh}l\\
&\Delta\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}\text{の正弦定理：} && \frac{\sin\varphi}{\mathrm{sinh}l} = \frac{\sin\psi}{\mathrm{sinh}d} = \frac{1}{\mathrm{sinh}s}\\
&\Delta\tilde{B}\tilde{D}\tilde{F}\text{の余弦定理：} && \cos\chi = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\mathrm{cosh}s\\
&\Delta\tilde{B}\tilde{D}\tilde{F}\text{の正弦定理：} && \frac{\mathrm{sinh}l'}{\cos\psi} = \frac{\mathrm{sinh}s}{\sin\chi}
\end{aligned}$$

まず、最初の式より $\mathrm{sinh}^2 s = \mathrm{cosh}^2 s - 1 = \mathrm{cosh}^2 d\mathrm{cosh}^2 l - 1$ であるが、このとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{sinh}^2 s - \mathrm{sinh}^2 d &= \mathrm{cosh}^2 d\mathrm{sinh}^2 l\\
\mathrm{sinh}^2 s - \mathrm{sinh}^2 l &= \mathrm{sinh}^2 d\mathrm{cosh}^2 l
\end{aligned} \tag{16.1}$$

を得る。$\Delta\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ の正弦定理と (16.1) より、

$$\begin{aligned}
\cos^2\psi\mathrm{sinh}^2 s = (1 - \sin^2\psi)\mathrm{sinh}^2 s &= (1 - \frac{\mathrm{sinh}^2 d}{\mathrm{sinh}^2 s})\mathrm{sinh}^2 s\\
&= \mathrm{cosh}^2 d\mathrm{sinh}^2 l
\end{aligned} \tag{16.2}$$

を得る。さらに、$\Delta\tilde{B}\tilde{D}\tilde{F}$ の余弦定理、$\Delta\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ の正弦および余弦定理、そして (16.1) より、

$$\begin{aligned}
\cos\chi &= -\frac{\mathrm{sinh}d\mathrm{sinh}l}{\mathrm{sinh}^2 s} + \sqrt{1 - \frac{\mathrm{sinh}^2 l}{\mathrm{sinh}^2 s}}\sqrt{1 - \frac{\mathrm{sinh}^2 d}{\mathrm{sinh}^2 s}}\mathrm{cosh}d\mathrm{cosh}l\\
&= \frac{-\mathrm{sinh}d\mathrm{sinh}l + \mathrm{sinh}d\mathrm{sinh}l(\mathrm{cosh}^2 l\mathrm{cosh}^2 d)}{\mathrm{sinh}^2 s}\\
&= \mathrm{sinh}d\mathrm{sinh}l
\end{aligned}$$

であるから、これと (16.2) と $\Delta\tilde{B}\tilde{D}\tilde{F}$ の正弦定理から、

$$\mathrm{sinh}^2 l' = \frac{\cos^2\psi\mathrm{sinh}^2 s}{\sin^2\chi} = \frac{\mathrm{cosh}^2 d\mathrm{sinh}^2 l}{\sqrt{1 - \mathrm{sinh}^2 d\mathrm{sinh}^2 l}}$$

これより、$\frac{\mathrm{sinh}l'}{\mathrm{sinh}l} > \mathrm{cosh}d > 1$ を得るが、これは $\tilde{F}$ が線分 $\tilde{A}\tilde{B}$ 上にないことを意味するが、このような $\tilde{F}$ は存在してはならなかったので、結局、$\mathrm{sinh}l\mathrm{sinh}d \geq 1$ でなければならない。ここで、d は（$r = 1, \theta_0 \square \theta \square \pi/2$ の場合であるから）

$$d = 4\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{1}{\sin\theta} d\theta = 4[-\log\cot\frac{\theta}{2}]_{\theta_0}^{\pi/2} = \log\cot^4\frac{\theta_0}{2}$$

であるから、最後に得られた不等式に代入すると、$\cot^4\frac{\theta_0}{2}$ は、二次不等式 $x^2-(2/\mathrm{sinh}l)x-1 \geq 0$ の非負解であるから、$\cot^4\frac{\theta_0}{2} \geq \frac{1+\mathrm{cosh}l}{\mathrm{sinh}l}$ が得られる。 [終]

[Q17] [Courant-Lebesgue Lemma の証明]

すべての $\rho \in [\delta, \sqrt{\delta}] \quad (0 < \delta < 1)$ にたいして、

$$\int_0^{2\pi} \|\frac{\partial v_n(\rho,\theta)}{\partial\theta}\| d\theta \geq m^{1/2}$$

であると仮定する。このとき、$m \square \frac{8\pi K}{\log\frac{1}{\delta}}$ を示せばよい。

$$\begin{aligned}
(\int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{dr}{r}) \cdot m &\square \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{r}(\int_0^{2\pi} \|\frac{\partial v_n(\rho,\theta)}{\partial\theta}\| d\theta)^2 dr \\
&\square 2\pi \int_0^{2\pi}\int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{r^2}\|\frac{\partial v_n(\rho,\theta)}{\partial\theta}\|^2 r dr d\theta \\
&\square 4\pi \int_{B_{\sqrt{\delta}}(o)\setminus B_\delta(o)} \frac{1}{2}(\frac{1}{r^2}\|\frac{\partial v_n}{\partial\theta}\|^2 + \|\frac{\partial v_n}{\partial r}\|^2) r dr d\theta \\
&\square 4\pi \int_M \frac{1}{2}\|dv_n\|^2 d\mu_g = 4\pi E(g, v_n)
\end{aligned}$$

となるが、ここで、$\int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{\delta}$ であり、また、$E(g, v_n) \square K$ であったから、求める不等式を得る。

[Q18]

定理. $\tilde{E} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ を m 次元（有限次元）多様体 $\mathcal{T}$ 上の滑らかな実数値汎関数とし、以下の三つの条件をみたすとする：

(i) $\tilde{E}$ は唯一の臨界点（*critical point*） $p_0 \in \mathcal{T}$ を持つ；

(ii) $\tilde{E}$ はプロパー（*proper*）関数である（すなわち、任意の閉区間の逆像 $\tilde{E}^{-1}[a, b]$ は $\mathcal{T}$ のコンパクト集合である）；

(iii) p_0 は非退化（*non-degenerate*）臨界点である（すなわち、$D^2\tilde{E}_{p_0} : T_{p_0}\mathcal{T} \times T_{p_0}\mathcal{T} \longrightarrow \mathbf{R}$ は非退化二次形式である）。

このとき、$\mathcal{T}$ は $\mathbf{R}^m$ に c^∞- 微分同型（*diffeomorphic*）である。

[証明] 必要なら適当な定数を加えることにより、 $\tilde{E}(p_0) = 0$ としてよい。さらに、$\mathcal{T}$ はリーマン計量 $< \cdot, \cdot >_p$ を持つとしてよい。$\nabla\tilde{E}$ を $< \cdot, \cdot >_p \quad (p \neq p_0)$ に関する$\tilde{E}$ の

gradient ベクトル場とし、$\sigma_p(t)$ をベクトル場 $Z = \frac{\nabla\tilde{E}}{\|\nabla\tilde{E}\|^2}$ の積分曲線（flow）とする（条件 (i) により、これは well-defined)。すなわち、

$$\frac{d}{dt}\sigma_p(t) = Z(\sigma_p(t)) \quad , \qquad \sigma_p(0) = p$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{E}(\sigma_p(t)) &= D\tilde{E}(\sigma_p(t))(\frac{d}{dt}\sigma_p(t)) \\ &=< \nabla\tilde{E}, Z >_{\sigma_p(t)} = 1\end{aligned}$$

であるから、

$$\tilde{E}(\sigma_p(t)) = t + \tilde{E}(p) \tag{18.1}$$

を得る。p_0 は $\tilde{E}$ の唯一の臨界点であるから、それは最小値（$\tilde{E}$ のプロパー性より存在する）でなければならない。（$\tilde{E}$ は非負値汎関数であることに注意。）さらに、p_0 は非退化臨界点であるから、有名なモースの補題により、点 p_0 のまわりの局所座標系 $\varphi^{-1} : U \longrightarrow \mathcal{T}$ があって、$\tilde{E}$ は次の形に書ける：

$$(\tilde{E}\circ\varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_m) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_m^2) \tag{18.2}$$

従って、十分小さい $\epsilon > 0$ にたいして、$\tilde{E}^{-1}[0, \epsilon[$ は開球（open ball）B_ϵ に diffeomorphic である。さらに、必要なら　$\epsilon > 0$ を選び直して、$B_{3\epsilon} \subset \mathrm{range}(\varphi)$ が成り立つようにしておく。一般に、リーマン計量は 1 の分割（partition of unity）を用いて構成されるので、$< \cdot, \cdot >$ を $B_{2\epsilon}$ に制限したものは、$\mathbf{R}^m$ の標準計量を φ で引き戻し（pull-back）たものであるとしてよい。 1 の分割を用いて、以下の条件 (a),(b),(c) をみたす $\mathcal{T}$ 上のベクトル場 X を構成する：

(a) $X \mid_{B_{2\epsilon}} = \nabla\tilde{E}$

(b) $X \mid_{\mathcal{T}\setminus B_{3\epsilon}} = Z$

(c) $D\tilde{E}(p)(X(p)) > 0$　（任意の $p \neq p_0$）、さらに、$D\tilde{E}(p)(X(p)) > \delta > 0$　（任意の $p \in B_{3\epsilon} \setminus B_\epsilon$）。

　ここで、X の flow を再び $\sigma_p(t)$ で表す。$p \in \mathcal{T} \setminus B_{3\epsilon}$ のときは、(18.1) が $t \geq 0$ にたいして成り立っている。$p \in B_{2\epsilon}$ のときは、$\varphi(p) = x = (x_1, \cdots, x_m)$ とすると、(18.2) より、

$$\nabla\tilde{E}(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_m)$$

が局所的に成り立っている。従って、この座標近傍において、

$$\sigma_p(t) = \varphi^{-1}(e^t x) \tag{18.3}$$

が成り立つことが確かめられる。ここで、任意の p にたいして、$t^+(p), t^-(p)$ を、それぞれ、$\sigma_p(t)$ が定義される時間の正の最大値、負の最大値とすると、

補題 **1(cf.** *"Introduction to Differentiable Manifolds", S.Lang).* $\mathcal{T}$ を境界のない（*without boundary*）多様体とする。もし、$t^+(p) < \infty$ か $t^-(p) > -\infty$ のどちらかが成り立つならば、それが成り立つ方にたいして、$t_n \to t^+(p)$ または $t_n \to t^-(p)$ となる任意の数列 $\{t_n\}$ にたいして $\sigma_p(t_n)$ は $\mathcal{T}$ に極限点（*limit point*）を持たない。

補題 1 より、次が得られる：

補題 **2.** もし $p \in \mathcal{T}$ ならば、$t^-(p) = -\infty, \quad t^+(p) = +\infty$ が成り立つ。

[証明] もし $t^+(p) < \infty$ ならば、(18.1) により $\{\sigma_p(t) \mid 0 \square t \square t^+(p)\}$ は、コンパクト集合 $\tilde{E}^{-1}[0, t^+(p) + \tilde{E}(p)]$ 上にある。すると、$t_n \to t^+(p)$ となる任意の数列 $\{t_n\}$ にたいして$\sigma_p(t_n)$ は limit point を持つことになり、これは補題 1 に反する。従って、$t^+(p) = +\infty$ である。$t^-(p) = -\infty$ についても同様である。 [終]

補題 **3.** すべての点 $p \in \mathcal{T}$ にたいして、$\lim_{t \to -\infty} \sigma_p(t) = p_0$ が成り立つ。

[証明] (18.1) により、$\tilde{E}(\sigma_p(t))$ は $\mathcal{T} \setminus B_{3\epsilon}$ 上で、$t \to -\infty$ のとき強単調減少である。条件 (c) により、十分大きいある t_0 にたいして$\sigma_p(t_0) =: q \in B_{2\epsilon}$ という状況は保証される。ここで、(18.3) により

$$\sigma_p(t_0 + s) = \varphi^{-1}(e^{t_0} e^s x) = \varphi^{-1}(e^s \varphi(q))$$
$$\to \varphi^{-1}(o) = p_0 \qquad \text{as} \quad s \to -\infty$$

[終]

さて、$\square$ と ω を、$0 < \square < \omega < \log 2$ かつ $\frac{\log 2 + 8\square}{9} < \omega < \log 2$ をみたすように選ぶ。例えば、$\square = \frac{1}{4}\log 2, \omega = \frac{2}{3}\log 2$ ととればよい。そして、$f : [0, \log 2[\longrightarrow [0, \infty[$ を次で定める：

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \square t \square \square) \\ t + \exp\left(-\dfrac{1}{(t-\square)^2} \cdot \dfrac{\omega - t}{\log 2 - t}\right) & (\square < t < \log 2) \end{cases}$$

すると、f は c^∞-diffeomorphism である。そこで、$\mathcal{V} : B_{2\epsilon} \longrightarrow \mathcal{T}$ を次で定める：

$$\mathcal{V}\,|_{B_\epsilon} = id$$
$$\mathcal{V}(\tilde{q}) = \sigma_p(f(t)) \quad , \qquad \tilde{q} \in B_{2\epsilon} \setminus B_\epsilon$$

ここで、t, p は、$p \in \partial B_\epsilon, \tilde{q} = e^t \varphi(p) \quad (0 \square t < \log 2)$ をみたすものである。すると、(18.2)、(18.3) および補題 3 により、 $\mathcal{V}$ は diffeomorphism である。

[Q19] [$D\widetilde{\Psi}(J)$ が水平ベクトル場を水平ベクトル場に移すことの証明]

$\Xi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_{-1}$ を$\Xi(g) = \lambda(g) \cdot g$ により定める。ここで、$R(\lambda(g) \cdot g) \equiv -1$ である。C^∞-級微分同型写像 $\Phi : \mathcal{M}/\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{A}$ に対して、$\Psi = \Phi^{-1} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{P}, \widetilde{\Psi} = \Xi \circ \Psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}_{-1}$ とおけば、これらも C^∞-級微分同型写像である。$H = (H^i_j), H_b = (H_{ij}), \Phi[g] = J$ とするとき、

$$D\Phi[g] H_b = -HJ$$

であったから、

$$D\Psi(J)H=(D\Phi)^{-1}H=(HJ)_b$$

となる。また、$g\in\mathcal{M}_{-1}$ より $\lambda(g)\equiv 1$ ととれるから、

$$\begin{aligned}D\Xi[g]h&=(D\lambda(g)\cdot h)g+\lambda(g)\cdot h\\&=:\rho\cdot g+h\end{aligned}$$

となるが、ρ は $DR(g)(\rho\cdot g+h)=0$ をみたすから、$\Delta_g\rho-\rho=\delta_g\delta_g h$ である。従って、

$$D\widetilde{\Psi}(J)H=(D\Xi\circ D\Psi)(J)H=\rho\cdot g+h,\qquad h=(HJ)_b,g=\widetilde{\Psi}(J)$$

を得る。いま、$\delta_g H=0$ とすると、$\Delta_g\rho(h)-\rho(h)=\delta_g\delta_g h=0$ となるので、$\rho(h)=0$ である。これより、$D\widetilde{\Psi}(J)H=h$ であるから、$\delta_g(D\widetilde{\Psi}(J)H)=0$ が得られる。最後に、

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_g h&=\mathrm{tr}\Big(\begin{pmatrix}H_1^1&H_2^1\\H_1^2&H_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\Big)\\&=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}H_2^1&-H_1^1\\H_2^2&-H_1^2\end{pmatrix}=0\end{aligned}$$

より、$\mathrm{tr}_g(D\widetilde{\Psi}(J)H)=0$ である。以上より、$D\widetilde{\Psi}(J)$ は水平ベクトル場を水平ベクトル場に移す。

[Q20]

$$\begin{aligned}\nabla_X\nabla_Y Z&=D(\nabla_Y Z)(X)-\frac{1}{2}J(\nabla_Y Z\cdot X+X\cdot\nabla_Y Z)\\&=D\{DZ(Y)-\frac{1}{2}(JZY+JYZ)\}(X)\\&-\frac{1}{2}J([DZ(Y)-\frac{1}{2}(JZY+JYZ)]X+X[DZ(Y)-\frac{1}{2}(JZY+JYZ)])\\&=D^2Z(X,Y)+\{DZDY(X)-\frac{1}{2}JZDY(X)-\frac{1}{2}JDY(X)Z\}\\&-\frac{1}{2}\{JDZ(X)Y+JDZ(Y)X+JYDZ(X)+JXDZ(Y)\}\\&-\frac{1}{4}\{XZY+XYZ+ZYX+YZX\}\end{aligned}$$

最後から二行目は $\nabla_Y\nabla_X Z$ のそれと打ち消し合うことがわかるし、$D^2Z(X,Y)$ も X,Y について対称な式であるので打ち消し合う。$\nabla_X\nabla_Y Z,\nabla_Y\nabla_X Z$ の残りの項で D を含む項は次の計算式より $\nabla_{[X,Y]}Z$ と打ち消し合うことがわかる：

$$\begin{aligned}\nabla_{[X,Y]}Z&=DZ([X,Y])-\frac{1}{2}J(Z[X,Y]+[X,Y]Z)\\&=DZDY(X)-DZDX(Y)\\&-\frac{1}{2}\{JZDY(X)+JDY(X)Z-JZDX(Y)-JDX(Y)Z\}\end{aligned}$$

従って、次を得る：

$$R(X,Y)Z=\frac{1}{4}(YXZ-XYZ+ZXY-ZYX)$$