

オイラー数と曲面の曲がり方の関係を記述する究極の定理

— ガウス・ボンネの定理 —

宇田川 誠一 (数学教室)

表題にあるオイラー数とは、我々の年代の人は小学校の算数の時間に学んだもので、多面体の頂点の個数を v 、辺の個数を e 、面の個数を f で表したとき、

$$\text{“オイラー数”} = v - e + f$$

という式により計算される数のことである。多面体の場合、必ずオイラー数は 2 になる。一方、より簡単な場合の多角形はどうであるかというと、この場合は必ず 1 になる。第 1 章では、このことから解説を始める。最終的には、多面体とは違って、角がない滑らかな閉曲面に対してもオイラー数を定義することを考える。この場合、オイラー数は閉曲面に穴がいくつ空いているかによって計算ができることがわかる。閉曲面の穴の数を g とするとき、

$$\text{“オイラー数”} = 2 - 2g$$

という式が得られる。例えば、多面体は角を丸めて滑らかな曲面に連続的に変形すると、穴が空いていない（すなわち、 $g=0$ ）閉曲面になるため、オイラー数は 2 である。このことは、頂点の個数、辺の個数、面の個数で多面体のオイラー数と一致していることを示している。このように、オイラー数とは図形の連続的な変形では変化しない幾何学的な量として定義されるわけである。つぎに、第 2 章では、ガウスによって導入されたガウス曲率という概念を導入する。これは、曲面上の各点で曲面の曲がり方を無限小で考えた場合の曲がり率を表す量である。そのガウス曲率を閉曲面全体で積分したときに出てくる積分量からオイラー数が計算できることがわかる。

「目次」

「1」 オイラー数について

- 1.1 多角形のオイラー数
- 1.2 多面体のオイラー数
- 1.3 オイラー数の応用例
- 1.4 球面のオイラー数
- 1.5 トーラスのオイラー数
- 1.6 一般の閉曲面のオイラー数

「2」 ガウス曲率について

- 2.1 曲線の曲率
- 2.2 閉曲線の回転数と曲率
- 2.3 曲面の曲率 (= ガウス曲率)
- 2.4 ガウス曲率の積分
- 2.5 ガウス=ボンネの定理

「1」オイラー数について

オイラーとは、17世紀のイタリアに生まれて活躍した当時世界最強の数学者 Euler のことである。オイラー数とは、オイラー(Euler)が考案したとされる幾何学的対象物に対するある数値である。それを以下で説明しよう。

1.1 多角形のオイラー数

多角形の頂点の個数を v 、辺の個数を e 、面の個数を f とするとき

$$(1.1) \quad v - e + f = 1$$

が成り立つ。

「例1」 三角形 : $v=3, e=3, f=1$ より、確かに $v-e+f = 1$ が成り立っている。この場合、三角形は3辺の内部まで入れて考え、それを面としている。(図1)

「例2」 四角形 : $v=4, e=4, f=1$ より、確かに $v-e+f = 1$ が成り立っている。この場合も四角形は4辺の内部まで入れて考え、それを面としている。(図2)

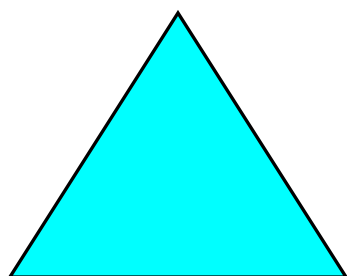


図1

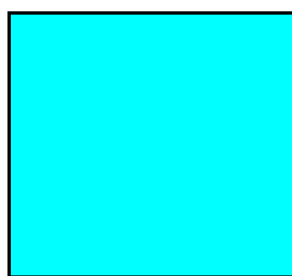


図2

一般に、多角形の場合には、頂点の個数と辺の個数が必ず等しく、面の個数は1なので、(1.1) が成り立つことがわかる。

1.2 多面体のオイラー数

多面体の頂点の個数を v 、辺の個数を e 、面の個数を f とするとき

$$(1.2) \quad v - e + f = 2$$

が成り立つ。これを**オイラーの多面体定理**という。この場合の $v-e+f$ の値を**多面体のオイラー数**といって、 χ で表すことにする。すなわち、

$$(1.3) \quad \chi = v - e + f = 2$$

とあらわすと。そうすると、いちいち、 $v-e+f$ と書かなくてすむようになるので、何回も書く必要があるときは、 χ を用いたほうが便利であるというだけである。

「例3」正四面体： $v=4, e=6, f=4$ より、確かに $\chi=v-e+f=2$ が成り立っている。(図3)

ここで、正四面体は4つの正三角形が合わさってできる多面体であるから、多角形のオイラー数の観点から正四面体のオイラー数を計算してみる。各正三角形のオイラー数は1であるから、それが4つあってオイラー数は4になるが、1つの頂点に3つの三角形が集まっているので、頂点の個数は、各頂点で2個減るため、全部で $4 \times 2 = 8$ 個頂点の個数は減ることになる。一方、辺については、

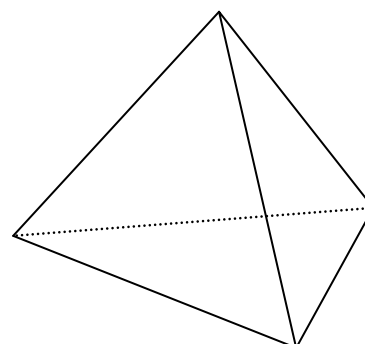


図3

は、正四面体の1つの辺には2つの正三角形の辺が集まっているので、各辺で1個ずつ減るため、全部で $6 \times 1 = 6$ 個の辺の個数が減ることになる。また、面の個数は変化がないので、合計すると $8-6+0=-2$ のオイラー数の変化が生じる。よって、最初に求めた4にこの(-2)を加えて $\chi=2$ を得る。

「例4」正20面体： $v=12, e=30, f=20$ より、確かに $\chi=2$ が成り立っている。(図4) これについても、多角形のオイラー数の観点から正20面体のオイラー数を計算してみよう。

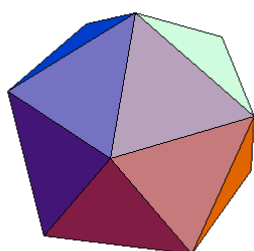


図4

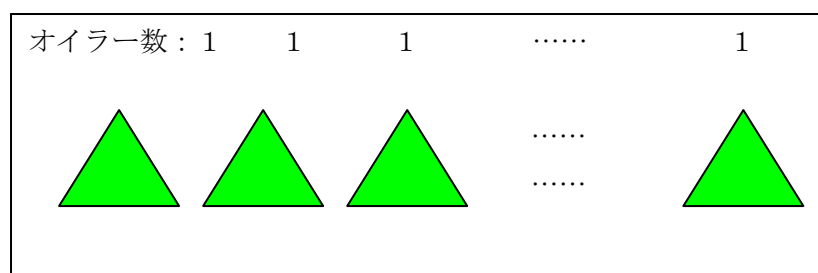


図5

正三角形が20個あるから、多角形のオイラー数の合計は $1 \times 20 = 20$ である(図5)。一方、正20面体は、各頂点に5つの正三角形が集まっているので、 $v=12$ より、各頂点で頂点の個数は $12 \times 4 = 48$ 個減る。また、1つの辺を共有している正三角形は2つずつあるので、 $e=30$ より $30 \times 1 = 30$ 個減る。面の個数は変化がないので、合計すると $-48 - (-30) + 0 = -18$ のオイラー数の変化が生じる。結局、最初の20にこの-18を加えて $\chi=2$ を得る。正多面体の辺の個数、頂点の個数、面の個数については後述する。

1.3 オイラー数の応用例

「オイラーの多面体定理」すべての多面体のオイラー数は $\chi = 2$ である。

ここで、多面体とは側面がすべてある多角形で構成された立体図形であり、閉じた立体、すなわち、側面全体により内側と外側が完全に遮断されているものをいう。例えば、立方体は側面がすべて正方形から構成された立体図形であり多面体であるが、この立方体から1つの側面を取り除いてしまったものは多面体とは呼ばないのである。この定理は、1675年のライプニッツの未発表ノートに記載があり、1639年にはデカルトが発見していたようである。1750年にこの定理を最初に発表したのがオイラーなので、現在ではオイラーの多面体定理と呼ばれている。オイラーの多面体定理を証明しよう。多面体を2つの平行な平面ではさみ、必要なら少しずつ傾けて2つの平面にはそれぞれ1つの頂点だけが接するように配置する(図6)。頂点の個数は有限個であるが傾ける方向は連続的に無数にあるので、このようなことは必ず可能である。さて、これを水平に水のなかに沈めていき、水の中に入った頂点、辺、面の個数で χ の値を計算していく。最初は、一番下の頂点が水に濡れるので $\chi = 1$ である。さらに沈めていくと、つぎの頂点に来るまでは辺の個数と面の個数が等しいことに注意すると $e = f$ であるから、 $\chi = 1$ のままである。つぎの頂点(図6では点A)では、 v の値は1つ増えるが、新しく水に濡れる辺の個数は2個であるが、新しく水に濡れる面の個数は1個で辺の個数のほうが面の個数より1つ多く $e = f + 1$ となっているので、依然として $\chi = 1$ のままである。このことは、つぎに来るどの頂点でも同じであるから、図6の点Bを通過した時点でも依然として $\chi = 1$ のままである。最後に、一番上の頂点が水の中に沈んだときに v が1つだけ増えるので、 $\chi = 2$ となって、オイラーの多面体定理の証明が完結する。

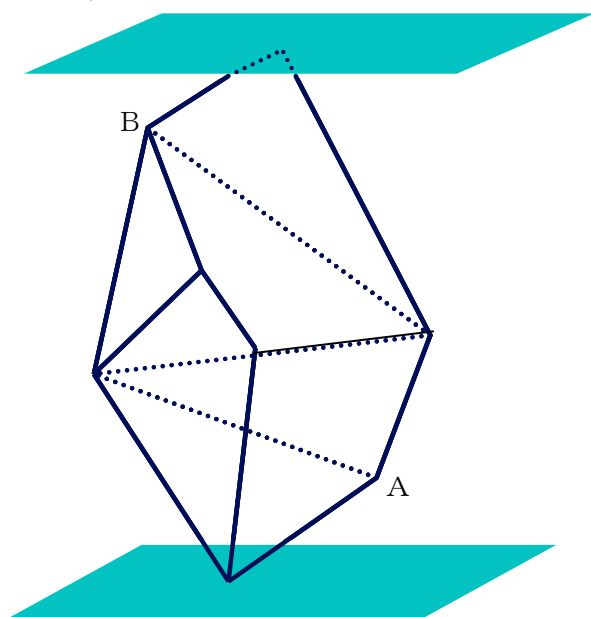


図 6

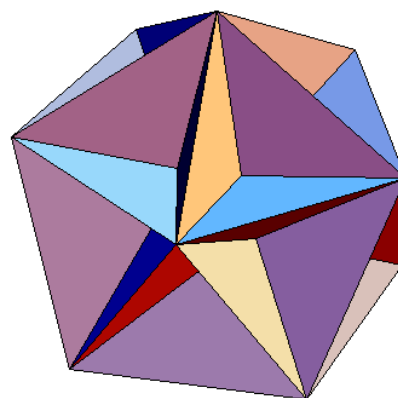


図 7

オイラーの多面体定理を応用すると、**正多面体**の分類ができる。ここで、正多面体とは、すべての側面が同じ正 n 角形で構成されていて、側面どうしのなす角度が同一であるような凸多面体のことをいう。凸多面体とは、多面体から、かつてに2つの側面を選び、各側面上で1つずつ計2点を任意に選んだとき、その2点を結ぶ線分が多面体の外に出ないようなもののことをいう。**凸多面体ではない多面体**とは、例えば、前ページの図7のような多面体のことである。それでは、正多面体の分類を試みよう。いま正 n 角形が、各頂点に m 個ずつ集まって正多面体ができているとし、面の個数を f とする。このとき、

“頂点の個数” $=v=n \times f \div m$ 、 “辺の個数” $=e= n \times f \div 2$ 、 “面の個数” $=f$ となっているはずであるから、オイラーの多面体定理に代入すると

$$(1.4) \quad \chi = (n \times f \div m) - (n \times f \div 2) + f = 2$$

が成り立たなければならない。いま、 $f > 0$ であるから、(1.4)の両辺を f で割ると

$$n \div m - n \div 2 + 1 = 2 \div f > 0$$

移項して n でくくると

$$(1.5) \quad n(1/2 - 1/m) < 1$$

が得られる。一方、各頂点には最低3個の多角形が集まっていないと多面体ができないので、 $m \geq 3$ でなければならない。すると

$$1/2 - 1/m \geq 1/2 - 1/3 = 1/6$$

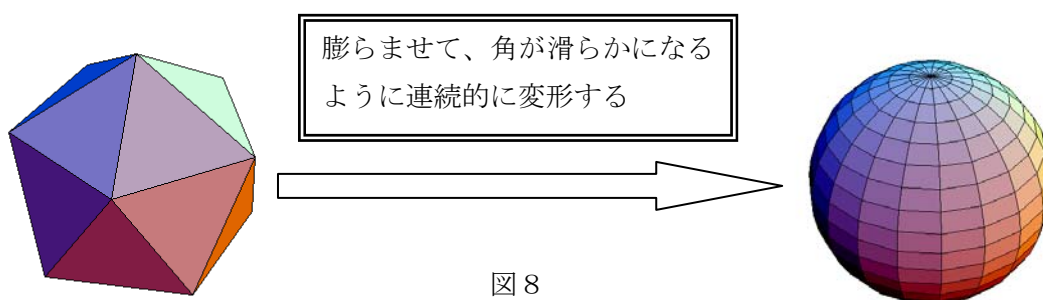
これと(1.5)を併せると $n < 6$ でなければならないことがわかる。また、 n は3以上の自然数であるから、結局、 $n=3, 4, 5$ である。この n を(1.5)に代入すれば m が求められ、(1.4)より f が求められる。まとめると以下の表のようになる:

n の値	m の値	f の値	多面体の名称
3	3	4	正4面体(Tetrahedron)
3	4	8	正8面体(Octahedron)
3	5	20	正20面体(Icosahedron)
4	3	6	正6面体(Hexahedron)
5	3	12	正12面体(Dodecahedron)

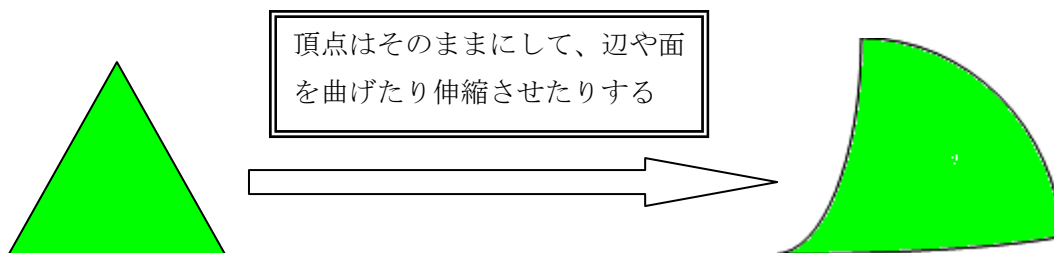
以上では、多面体を対象にして考えてきたが、以降は角をヤスリで削って滑らかな曲面を考えていく。つまり、そのような滑らかな曲面に対してもオイラー数に相当するものを定義したいわけである。

1.4 球面のオイラー数

多面体のオイラー数は自然数2であるので、多面体を少々連続的に変形してもオイラー数は変化しないということは直感的に明らかであろう。多面体の面を少々伸ばしたり、辺の長さを少々縮めたりしても、オイラー数は2から 2.01 とか 1.99 になつたりはしないからである(もちろん、オイラー数は自然数であるから、変わるなら 3 とか 1 であるが、オイラーの多面体定理より、それはすでに多面体ではない)。多面体を凸であることを保ちながら連続的に変形して膨らませていくと、球面になる:



つまり、球面のオイラー数は2であるように、滑らかな曲面に対してもオイラー数を定義するのがよいわけである。それには、まず、多角形のオイラー数を辺が直線ではなく曲線になっていて、面も平面ではなく曲面片になっている場合に拡張しなければならない:



曲線を辺、曲面片を面とする立場をとれば、右側の図形についても、 $\chi = 1$ が成り立っているわけである。そうすると、図8の左側の多面体は例えば三角形で側面が構成されているが、右側の曲面は、イチョウの葉のような三角形の形をして曲面片で構成されていることがわかる(左側の多面体の各面である三角形が連続して変形した結果がその曲面片である)。そうすると、作り方からして、球面のオイラー数は2であることは明らかである。このことを、その他の曲面にも適用してみよう。

1.5 トーラスのオイラー数

トーラスとは、ドーナツ型の曲面であり、穴が1つ開いている(図9)。

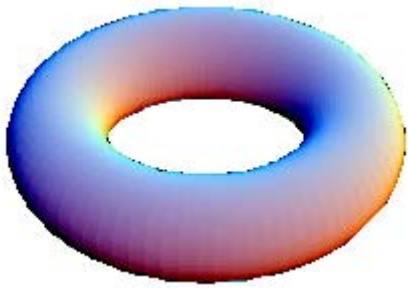


図9

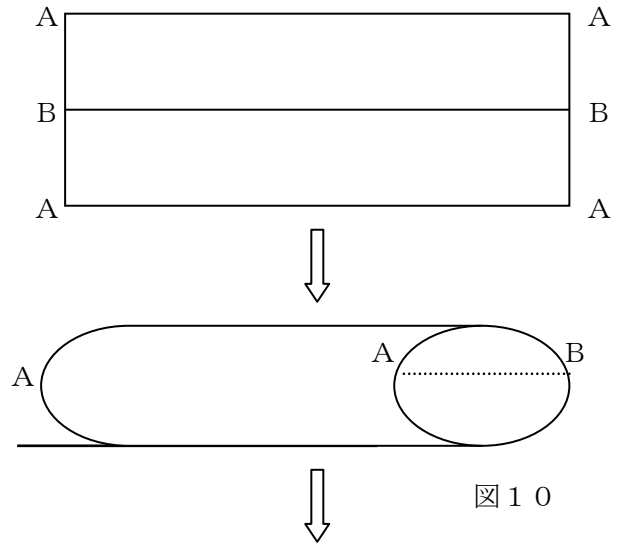


図10

図10は、トーラスの作り方を示している。まず、長方形の紙を用意して筒型を作り、2つの円周に沿って貼り合わせるとトーラスができる。もちろん、貼り合わせるときに紙はしわくちゃになってしまうが、滑らかになるように補正したものを考えるのである。実際に作るには、紙ではなく、伸び縮み自由な素材を利用するとよい。

さて、このトーラスのオイラー数を計算してみよう。まず、トーラスを切り開いた図に7つの点A, B, C, D, E, F, Gを図11のようにとる。そして、図11のように14個の三角形に分割する。図10のようにトーラスを作ると、これがトーラスの三角形による分割を与える。これにより、オイラー数を計算することができる。この場合、 $v=7$, $e=21$, $f=14$ であるから、 $\chi = 7 - 21 + 14 = 0$ である。図11のような三角形による分割は面の個数が最小の分割であることが知られている。他の分割方法としては、トーラスを4つに切って、各円筒を2つの長方形に分けると、全部で8つの長方形に分けられる。そこで、各長方形を2つの三角形に分割すると全部で16個の三角形に分割できる。この場合

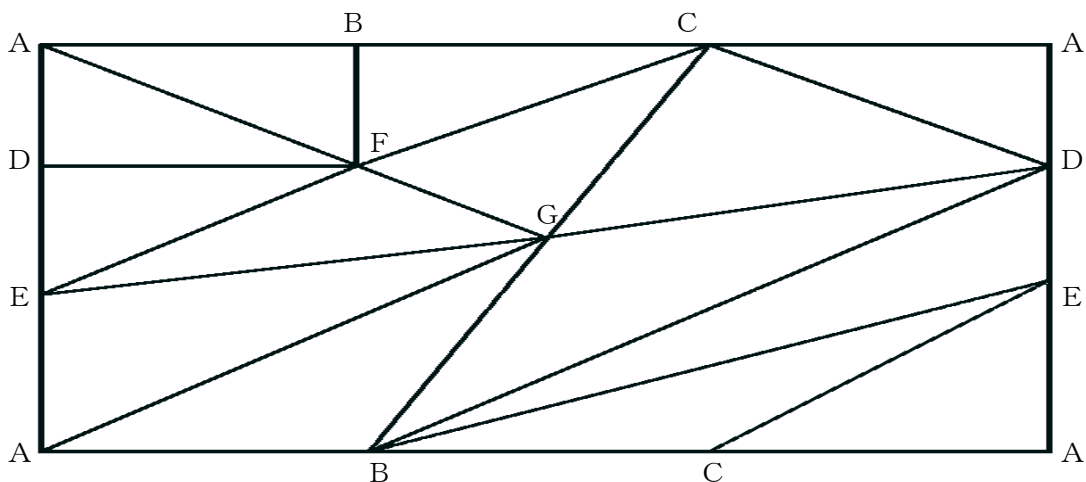


図11

も $\chi = 0$ であることはすぐにわかる。実際、三角形によるどのような分割をしても、オイラー数は常に同じ値になる。そうでないと、オイラー数というものが意味を持たなくなる。このことは、例えば、1つの三角形をより小さな三角形に分割しても、オイラー数は1のままであることから得られる事実である。図12では、 $v=6, e=9, f=4$ であるが、結局、 $\chi = 6 - 9 + 4 = 1$ となって、最初の1つの三角形の場合とオイラー数は変化しない。

以上により、トーラスのオイラー数は0であることがわかった。

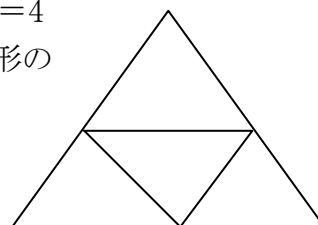


図12

1.6 一般の閉曲面のオイラー数

閉曲面とは、曲面によって内側と外側が遮断されたもので、縁がない曲面のことをいう。球面とかトーラスは、もちろん、閉曲面である。一般の閉曲面はトーラスをいくつか滑らかにつなげてできる穴がいくつか開いた曲面である。モービウスの帯は縁があるし、さらに、表も裏もなく曲面の内側と外側の区別が付けられないので、ここで言う閉曲面ではない。また、クラインの壺は縁がない曲面ではあるが、これも曲面の内側と外側の区別が付けられないので、ここで言う閉曲面ではないことを注意しておこう。

「例5」**ダブル・トーラス**：これは、Pretzel 型の曲面である(図13)。このダブル・トーラスのオイラー数を計算してみよう。図13のダブル・トーラスを真ん中で切って2つのトーラスに分割する。それぞれは縁付きの曲面になるが、その切れ目の縁が1つの三角形になるように連続的に変形しておく(そうしてのオイラー数は変化しないのであった)。すると、左のトーラスは三角形の面1つ減ったので、オイラー数は

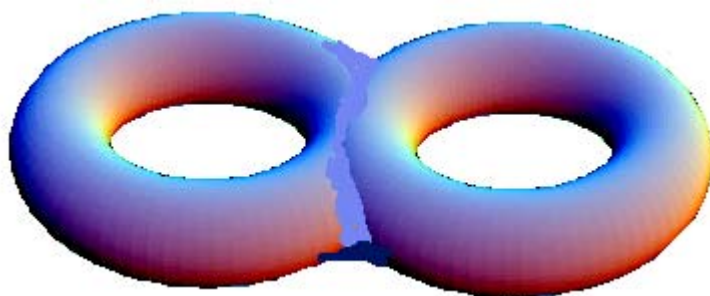


図13

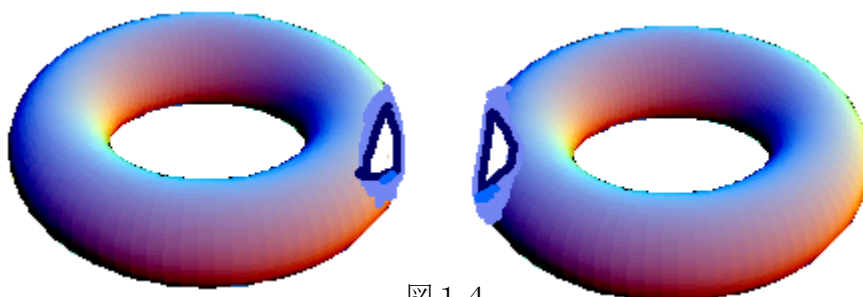


図14

トーラスのオイラー数 0 から 1 減るので -1 である。右側のトーラスも同様にオイラー数は -1 である。各トーラスの切り口の三角形の縁に沿って両者を貼り合わせて図 13 のようにダブル・トーラスを作ると、辺の個数は 3 個減り、頂点の個数も 3 個減るので、結局、 $\chi = -1 \times 2 - 3 - (-3) = -2$ となる。従って、**ダブル・トーラスのオイラー数は -2** である。ダブル・トーラスのオイラー数はトーラスのオイラー数から 2 減るわけである。一般に、任意の閉曲面に対して、トーラスを 1 つ滑らかにつなげると、オイラー数は 2 個減ることがわかる。閉曲面が g 個の穴が空いているとすると、これは、トーラスに $(g-1)$ 個のトーラスを滑らかにつなげたものであるから、オイラー数は $2(g-1)$ だけ減ることがわかる(図15)。したがって、次の定理を得る：

「閉曲面のオイラー数に関する定理」

穴が g 個空いた閉曲面のオイラー数を χ_g で表すとき $\chi_g = 2 - 2g$ である。

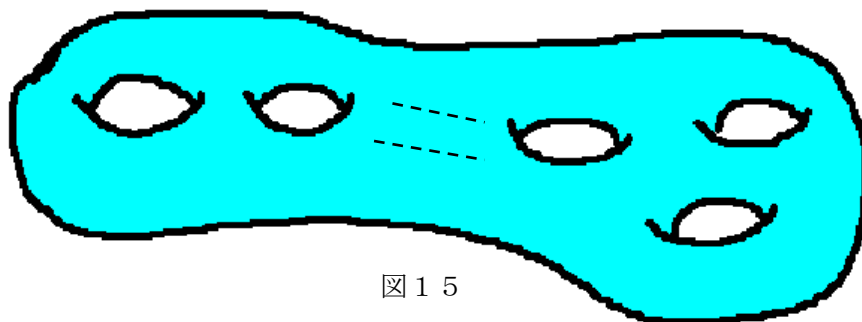


図 1 5

例えば、球面は穴の個数が 0 であるから、 $\chi = \chi_0 = 2$ であり、トーラスは穴の個数が 1 であるから、 $\chi = \chi_1 = 0$ となる。

「2」 ガウス曲率について

曲線や曲面の曲がり方の尺度であるガウス曲率を定義して、典型的な例について計算する。さいごに、オイラー数と曲率の関係を記述する究極の定理「ガウス・ボンネの定理」について述べる。

2. 1 曲線の曲率

平面曲線は t をパラメータとして $P(t) = (x(t), y(t))$ と表せる。曲線上の点 $P(t)$ における接線ベクトルは $P'(t) = (x'(t), y'(t))$ である。パラメータの範囲が 0 から t までの曲線の長さを $s(t)$ として、新たに s をパラメータに取り直した曲線 $P(s)$ を考える。すると、この曲線の各点の接線ベクトルは長さが 1 になっている。このようなパラメータ s のことを**弧長パラメータ**という。

「例 2. 1」半径 r の円周 $P(t) = (x(t), y(t))$ は、 $x(t) = r \cos(t)$, $y(t) = r \sin(t)$ とパラメータを入れることができる。円弧の長さは、半径 \times 円弧の中心角より、 $s(t) = r t$ であるから、 s を新しいパラメータとして $x(s) = r \cos(s/r)$, $y(s) = r \sin(s/r)$ とすれば、

$P'(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r))$ であるから、接線ベクトルの長さは
 $(-\sin(s/r))^2 + (\cos(s/r))^2 = 1$ より、どの点においても1であることがわかる。

$P'(s)$ を $e_1(s)$ として、 $P''(s)$ を r 倍したものを $e_2(s)$ とする。すなわち、

$$e_1(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r)) \quad , \quad e_2(s) = (-\cos(s/r), -\sin(s/r))$$

とする。これらは、互いに直交し、長さが1のベクトルであり、**曲線 $P(s)$ に沿う直交ベクトル場**という。 $e_1(s)$ をさらに s で微分すると、 $e_1'(s) = (1/r) e_2(s)$ が成り立っているが、このときの $1/r$ を曲線 $P(s)$ の**曲率**という。あるいは、曲率は $P''(s)$ の長さ、として定義しても同じである。

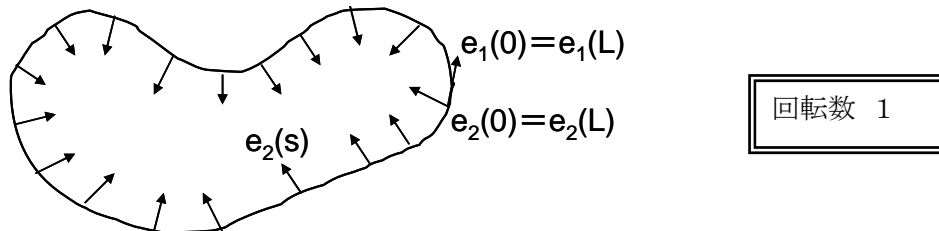
一般に、弧長パラメータで曲線 $P(s)$ を微分すると長さ1のベクトル $e_1(s)$ が得られ、 $e_1(s)$ を平面内で時計の針の回転と反対方向へ90度回転させたものを $e_2(s)$ とするとき、

$$e_1'(s) = k(s)e_2(s)$$

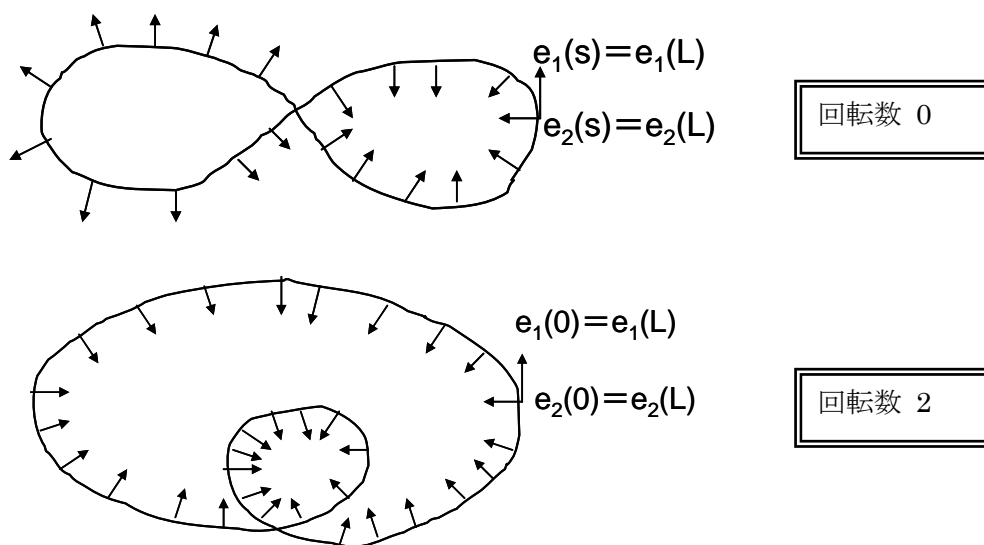
と書けることがわかる。このときの s の関数 $k(s)$ を曲線 $P(s)$ の**曲率**と呼ぶ。曲率は一般に点ごとに値が変わるが、例2. 1の円周の場合にはどの点でも正の一定値になる。そのことが、円周が丸いということを表している。

2. 2 閉曲線の回転数と曲率

長さ L の糸の両端をつないで平面の上に置いたものを**平面閉曲線**という。簡単のため、それを閉曲線と呼ぶことにする。この閉曲線の**回転数**とは、曲線に沿う正規直交ベクトル場 $\{e_1(s), e_2(s)\}$ にたいして $e_2(s)$ を平面内で平行移動して、ベクトルの始点が平面の原点になるようにすると、ベクトルの終点は、半径1の円周上にある。そこで、 s が 0 から L まで動くとき、 $e_2(s)$ の終点が半径1の円周上を回転した回数を、その閉曲線の回転数と呼ぶ。ただし、時計の針と同じ向きの回転はマイナスをつけて数える。下図の例では、 $e_2(s)$ を原点に平行移動してみると、最初は第2象限にあるが、徐々に回転して一旦は第4象限まで行くが、途中で第3象限に戻り、再び第4象限、



第1象限と回転して行き、最終的に第2象限の最初の位置にたどり着くので、回転数は1であることがわかる。同様にして、見て行くと、以下の例は、それぞれ、回転数0と回転数2であることがわかる。回転数0の例は、反時計周りと時計周りの回転を繰り返しつつ、結局、1回転もせずに元の位置に戻ってしまうからである。



閉曲線の曲率と回転数の関係が次の定理で与えられる:

「定理2.1」 $\int_0^L k(s) ds = 2\pi m$ が成り立つ。m は閉曲線の回転数を表す。

この定理は、局所的な情報である曲率を閉曲線全体に沿って積分(これを線積分という。大学初年度で学ぶ微分積分の教科書には必ず載っている)すると、大域的な情報である閉曲線の回転数が得られる、という関係を表す公式である。

2.3 曲面の曲率(=ガウス曲率)

今度は、空間内の曲面を考えて、その曲面の各点で曲面の曲がり方を記述する“曲率”というものを定義したい。曲面の各点を通る曲線は無数にあるため、何か条件を付けないと定義できない。曲面とは

$$P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

という形でパラメータ u, v で表示できる空間内の点の集合である。そこで、天才ガウスが考えた曲面の曲率の概念を述べる。曲面の点 x で接する接平面に垂直な平面で曲面を切ったときにできる平面曲線の(点 x における)曲率を考える。その曲率の中で**最大値 k_1 と最小値 k_2 との積を曲面の曲率と定める**。それをガウスの名にちなんで**ガウス曲率**と呼んで、 $K = k_1 \cdot k_2$ と表す。

「例2.2」半径 r の球面：半径 r の球面は、どの点の接平面を考えても、接平面に垂直な平面で切ってできる平面曲線は半径 r の円(大円)になる。従って、例2.1により、どの平面曲線の曲率も $1/r$ であるから、最大値と最小値はともに $1/r$ である。よって、 $k_1 = k_2 = 1/r$ であるから、 $K = 1/r^2$ となっている。すなわち、半径 r の球面はどの点においてもガウス曲率は一定であり $1/r^2$ に等しい。

定理2. 1を曲面の場合に拡張したい。それには、曲面上でガウス曲率を積分することを考えなければならない。では、その積分の結果は何を意味するのか？ 定理2. 1から推測して、何か曲面を連続的に変形しても変わらないものになるのではないか？ 結論を先に言うと、それはオイラー数で表すことができるのである。その関係を記述した式が、これから述べる**ガウス・ボンネの定理**である。

2. 4 ガウス曲率の積分

ガウス曲率を曲面上で積分したい。曲面の変数は2個あるので、ガウス曲率 2 変数の関数である。ここで、曲線の場合を思い出してみると、弧長パラメータ s について

$$\int_0^L ds = [s]_0^L = L$$

であるから、1 を積分すると曲線の長さが得られるようになっている。そこで、曲面の場合も 1 を積分すると面積が得られるように積分を定義しておく必要がある。曲面 S を

$$P(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

と表したとき、

$E =$ “ $P(u, v)$ を u で偏微分したベクトルの長さの2乗”

$G =$ “ $P(u, v)$ を v で偏微分したベクトルの長さの2乗”

$F =$ “ $P(u, v)$ を u で偏微分したベクトルと

$P(u, v)$ を v で偏微分したベクトルとの内積”

そして

$$dA = \sqrt{EG - F^2} \, du dv$$

とおく。すると

$$\int_S dA = \text{“曲面 } S \text{ の面積”}$$

となる。積分記号の下に S と書いているのは、曲面全体で積分を行うことを意味している。

「例2. 3」半径 r の球面の面積 : 半径 r の球面は

$$P(u,v)=(r \cos(u)\cos(v), r \cos(u)\sin(v), r \sin(u))$$

とパラメータを入れることができる。ここで、 $0 \leq v \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ である。

このとき、 $P(u, v)$ の u, v についての偏微分は

$$P_u = (-r \sin(u)\cos(v), -r \sin(u)\sin(v), r \cos(u))$$

$$P_v = (-r \cos(u)\sin(v), r \cos(u)\cos(v), 0)$$

で与えられるので、 E, F, G の定義より

$$E=r^2, \quad G=r^2 \cos^2(u), \quad F=0$$

であるから、 $dA = r^2 \cos(u) \, du \, dv$ である。従って、

$$\int_S dA = \int_0^{2\pi} dv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(u) \, du = 2\pi r^2 \left[\sin(u) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2$$

というよく知られた結論が得られる。

曲面 S 上でのガウス曲率 K の積分とは

$$\int_S K \, dA$$

のことである。半径 r の球面の場合、 $K=1/r^2$ であったから、

$$\int_S K \, dA = \int_S (1/r^2) \, dA = (1/r^2) \int_S dA = (1/r^2) \times 4\pi r^2 = 4\pi$$

が得られる。

2.5 ガウス・ボンネの定理

S を穴が g 個の閉曲面とし、 χ を閉曲面 S のオイラー数とする。このとき S のガウス曲率 K の積分はオイラー数で表せる：

「定理2.2」
$$\int_S K \, dA = 2\pi \chi = 4\pi(1-g)$$

これを、**ガウス・ボンネの定理**という。証明はこの原稿のレベルを超えるので、ここでは紹介できないが、興味を持たれた読者は文献[2]を参照していただきたい。球面の場合には、 $g=0$ であり、ガウス曲率の積分値は 4π になるという例2.3の結果が確認される。トーラスの場合は、ガウス曲率の積分値は 0 になるということがわかる。

「参考文献」

- [1] V.L. ハンセン(井川・宇田川 邦訳)、「自然の中の幾何学—みつばちの巣から宇宙論まで」、数理科学シリーズ、1994年初版、トッパン。
- [2] 小林昭七、「曲線と曲面の微分幾何」、1996年第24版、裳華房。